Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 32

CORRECTION

Partie A: Administration par voie intraveineuse

1. Déterminons la demi-vie $t_{0,5}$:

Il s'agit ici de déterminer t tel que: $f(t) = 10$.

$$f(t) = 10 \iff 20\,e^{-0,1t} = 10$$

$$\iff e^{-0,1t} = \frac{1}{2}$$

$$\iff e^{0,1t} = 2$$

$$\iff 0,1\,t = \ln(2)$$

$$\implies t_{0,5} = 10 \times \ln(2).$$

Au total, la demi-vie est: $t_{0,5} = 10 \times \ln(2)$ cad $t_{0,5} \approx 6,9$ heures.

6, 9 heures correspond en fait à: 6 heures et 54 minutes.

2. Déterminons le temps à partir duquel le médicament est éliminé:

Il s'agit ici de déterminer t tel que: $f(t) \leqslant 0,2$.

$$f(t) \leqslant 0,2 \iff 20\,e^{-0,1t} \leqslant 0,2$$

$$\iff e^{-0,1t} \leqslant 0,01$$

$$\iff e^{0,1t} \geqslant 100$$

$\iff 0,1t \geqslant \ln(100)$

$\Rightarrow t \geqslant 10 \times \ln(100)$ ou $t \geqslant t^*$, avec: $t^* = 10 \times \ln(100)$.

Au total, le temps à partir duquel le médicament sera éliminé est:

$t^* = 10 \times \ln(100)$ cad $t^* \approx 46,1$ heures (arrondi au dixième).

46, 1 heures correspond en fait à: 46 heures et 06 minutes.

3. Vérifions que l'ASC est égale à 200 $\mu g \cdot L^{-1} \cdot h$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.

Soit: $I = \int_0^x f(t)\,dt$.

f est continue sur $[0; +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $[0; +\infty[$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x 20\,e^{-0,1t}\,dt$$

$$= 20 \times \left[-\frac{e^{-0,1t}}{0,1} \right]_0^x \Rightarrow I = 200 - \frac{200}{e^{0,1x}}.$$

Dans ces conditions:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} I$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(200 - \frac{200}{e^{0,1x}} \right)$$

$$= 200 \quad \left(\text{d'après le cours: } \lim_{x \to +\infty} -\frac{200}{e^{0,1x}} = 0 \right).$$

Au total, l'ASC est bien égale à: $200\ \mu g \cdot L^{-1} \cdot h$.

Partie B: Administration par voie orale

1. Démontrons que sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $g'(t) = 20\,e^{-t}\,(1 - 0,1\,e^{0,9t})$:

Ici: • $g(t) = 20\,(e^{-0,1t} - e^{-t})$

• $Dg = [\,0\,;+\infty\,[$.

Posons: $g = 20\,(g_1 + g_2)$, avec: $g_1(t) = e^{-0,1t}$ et $g_2(t) = -\,e^{-t}$.

g_1 et g_2 sont dérivables sur IR comme fonctions " exponentielles ", donc dérivables sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, $g_1 + g_2$ est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Par conséquent, $g = 20\,(g_1 + g_2)$ est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$: $g'(t) = 20\,(-\,0,1\,e^{-0,1t} + e^{-t})$

$$\Rightarrow\ g'(t) = 20\,e^{-t}\,(1 - 0,1\,e^{0,9t}).$$

Au total, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, nous avons bien: $g'(t) = 20\,e^{-t}\,(1 - 0,1\,e^{0,9t})$.

2. a. Étudions les variations de g sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$:

• **1er cas**: $g'(t) = 0$.

$g'(t) = 0$ ssi $1 - 0,1\,e^{0,9t} = 0$ $(20\,e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[\,)$

$$\iff e^{0,9t} = 10$$

$$\iff 0,9\,t = \ln(10), \text{ cad: } t = \frac{\ln(10)}{0,9}.$$

• **2ème cas**: $g'(t) < 0$.

$g'(t) < 0$ ssi $1 - 0,1\,e^{0,9t} < 0$ $\quad (20\,e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[\,)$

$$\iff e^{0,9t} > 10, \text{ cad: } t > \frac{\ln(10)}{0,9}.$$

• **3ème cas**: $g'(t) > 0$.

$g'(t) > 0$ ssi $1 - 0,1\,e^{0,9t} > 0$ $\quad (20\,e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[\,)$

$$\iff e^{0,9t} < 10, \text{ cad: } t < \frac{\ln(10)}{0,9}.$$

Au total: • g est croissante sur $\left[\,0\,;\frac{\ln(10)}{0,9}\right]$,

(car sur $\left[\,0\,;\frac{\ln(10)}{0,9}\right]$, $g'(t) \geqslant 0$)

• g est décroissante sur $\left[\frac{\ln(10)}{0,9}\,;+\infty\right[$.

(car sur $\left[\frac{\ln(10)}{0,9}\,;+\infty\right[$, $g'(t) \leqslant 0$)

2. b. Dressons le tableau de variations de g:

t	0		$\frac{\ln(10)}{0,9}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = g(0) \Rightarrow a = 0,$

• $b = g\left(\frac{\ln(10)}{0,9}\right) \Rightarrow b \approx 13,94,$

• $c = \dots$

2. c. Déduisons-en la durée après laquelle la concentration est maximale:

D'après le tableau de variations, le maximum de g est atteint au point:

$$\left(\frac{\ln(10)}{0,9} ; g\left(\frac{\ln(10)}{0,9}\right)\right).$$

Or: $\frac{\ln(10)}{0,9} \approx 2,56$ heures.

Au total, la durée après laquelle la concentration est maximale est:

$$t_{max} \approx 2,56 \text{ heures.}$$

2, 56 heures correspond en fait à: 2 heures et 34 minutes.