

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1. a. Montrons que pour tout  $x \in [-2; 2]$ ,  $f(-x) = f(x)$ :

Ici: •  $f(x) = \frac{-b}{8} (e^{\frac{x}{b}} + e^{\frac{-x}{b}}) + \frac{9}{4}$ , avec  $b > 0$

•  $Df = [-2; 2]$ .

Dans ces conditions pour tout  $x \in [-2; 2]$ :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-b}{8} (e^{\frac{-x}{b}} + e^{\frac{-(-x)}{b}}) + \frac{9}{4} \\ &= \frac{-b}{8} (e^{\frac{-x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}) + \frac{9}{4} \\ &= \frac{-b}{8} (e^{\frac{x}{b}} + e^{\frac{-x}{b}}) + \frac{9}{4} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien, pour tout  $x \in [-2; 2]$ :  $f(-x) = f(x)$ .

1. b. Que peut-on en déduire ?

Cela signifie: • d'une part, que la fonction  $f$  est paire sur  $[-2; 2]$ ,  
• d'autre part, que la courbe représentative de  $f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

## 2. Calculons $f'$ sur l'intervalle $[-2; 2]$ :

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc dérivable sur  $[-2; 2]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [-2; 2]$ .

$$\text{Pour tout } x \in [-2; 2]: f'(x) = \frac{-b}{8} \left( \frac{1}{b} e^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{b} e^{\frac{-x}{b}} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{8} (e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}).$$

$$\text{Au total, pour tout } x \in [-2; 2]: f'(x) = -\frac{1}{8} (e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}).$$

## 3. a. Dressons le tableau de variations de $f$ sur $[-2; 2]$ :

### • Étudions le signe de $f'$ sur $[-2; 2]$ :

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $x$  de  $[-2; 2]$ :

#### • 1<sup>er</sup> cas: $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -(e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{b} = -\frac{x}{b} \quad (\text{car: } \ln[e^u] = u)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{b} = 0, \text{ cad: } x = 0.$$

#### • 2<sup>ème</sup> cas: $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } \frac{2x}{b} > 0, \text{ cad: } x \in ]0; 2].$$

#### • 3<sup>ème</sup> cas: $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } \frac{2x}{b} < 0, \text{ cad: } x \in [-2; 0[.$$

**Au total:** •  $f$  est croissante sur  $[-2; 0]$ ,

( car sur  $[-2; 0]$ ,  $f'(x) \geq 0$  )

•  $f$  est décroissante sur  $[0; 2]$ .

( car sur  $[0; 2]$ ,  $f'(x) \leq 0$  )

• Dresser le tableau de variations de  $f$ :

$x$	-2	0	2
$f'$	+	0	-
$f$			

Avec: •  $a = f(-2) \Rightarrow a = \frac{-b}{8} (e^{\frac{-2}{b}} + e^{\frac{2}{b}}) + \frac{9}{4}$ ,

•  $a' = f(0) \Rightarrow a' = \frac{-b+9}{4}$ ,

•  $a'' = f(2) \Rightarrow a'' = \frac{-b}{8} (e^{\frac{2}{b}} + e^{\frac{-2}{b}}) + \frac{9}{4}$ .

3. b. Déduisons-en les coordonnées du point S en fonction de b:

D'après le tableau de variations, le maximum de  $f$  est atteint au point:

$$(0; a') \text{ cad } \left(0; \frac{-b+9}{4}\right).$$

Au total, le point S est tel que:  $S\left(0; \frac{-b+9}{4}\right)$ .

## Partie B:

### 1. Justifions que $b = 1$ :

D'après l'énoncé: " On souhaite que le point S soit à 2 mètres du sol ".

Dans ces conditions, nous avons:

$$f(0) = 2 \iff \frac{-b+9}{4} = 2 \implies b = 1.$$

Au total, nous avons bien:  $b = 1$  et  $S(0; 2)$ .

### 2. a. Montrons que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$ :

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel "  $K$  " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel "  $c$  " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement " croissante " ou " décroissante " sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $[-2; 2]$ , donc sur  $[0; 2]$ .

• "  $k = 1,5$  " est compris entre:  $f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4}$  (car:  $b = 1$ )

et:  $f(0) = 2$ .

•  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; 2]$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 1,5$  ( $k = 1,5$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à  $]0; 2]$ .

**Au total:**  $f(x) = 1,5$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; 2]$ .

## 2. b. Déduisons-en une valeur approchée de " $a$ " au centième:

Comme " **La hauteur du mur est de 1,5 mètres** ", "  $a$  " est tel que:  $f(a) = 1,5$ .

Déterminer la valeur de "  $a$  " revient donc à déterminer la valeur de  $\alpha$ .

Par tâtonnement, nous trouvons:  $a = \alpha \approx 1,76$  à  $10^{-2}$  près.

**Au total, une valeur approchée de  $a$  au centième est:  $a \approx 1,76$ .**

## 3. Que décide le client ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la masse réelle d'un vantail et comparer le résultat obtenu à 60 kg.

**D'après le cours, nous savons que:**

" Pour un corps homogène d'épaisseur constante, la masse surfacique ( $M_s$ ) est le rapport de sa masse ( $m$ ) sur sa surface ( $A$ ) ".

$$\text{D'où: } M_s = \frac{m}{A}$$

- Ici:
- la densité des planches de bois (**masse surfacique**) est égale à  $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ ,
  - l'aire d'un vantail (**surface**) est égale à  $\mathcal{A} = \int_0^a f(x) dx$  (en  $\text{m}^2$ ),
  - la masse d'un vantail **m** est l'inconnue recherchée (en kg).

Dans ces conditions:  $m = 20 \times \mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} \text{Or: } \mathcal{A} &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^{1,8} f(x) dx \\ &= \int_0^{1,8} \left( -\frac{1}{8} (e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4} \right) dx \\ &= -\frac{1}{8} [e^x - e^{-x}]_0^{1,8} + \left[ \frac{9}{4} x \right]_0^{1,8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = -\frac{1}{8} (e^{1,8} - e^{-1,8}) + 4,05 \quad \text{ou: } \mathcal{A} \approx 3,31 \text{ m}^2.$$

D'où:  $m \approx 20 \times 3,31 \Rightarrow m \approx 66,29 \text{ kg}$ .

**Au total:** comme  $m \approx 66,29 \text{ kg} > 60 \text{ kg}$ , la masse d'un vantail excède 60 kg et donc le client décidera d'automatiser son portail.

### Partie C:

Évaluons l'économie réalisée en termes de surface en choisissant " 2 " plutôt que " 1 ":

Soient: •  $\mathcal{A}_1$ , l'aire du rectangle (forme 1),

- $\mathcal{A}_2$ , l'aire du trapèze (forme 2).

Nous avons: •  $\mathcal{A}_1 = 2 \times a$  (car:  $S(0; 2)$ ),

$$\bullet \mathcal{A}_2 = \left( \frac{b+B}{2} \right) \times h \Leftrightarrow \mathcal{A}_2 = \left( \frac{CH + OG}{2} \right) \times a$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_2 \approx \left( \frac{1,63 + 2,16}{2} \right) \times a$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_2 \approx 1,895 \times a.$$

Or:  $a = 1,8$ , d'où:  $\mathcal{A}_1 = 3,6 \text{ m}^2$  et  $\mathcal{A}_2 \approx 3,411 \text{ m}^2$ .

Et:  $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 \approx 0,19 \text{ m}^2$ .

Ainsi, l'économie réalisée en termes de surface en choisissant " 2 " plutôt que " 1 " est: d'environ  $0,19 \text{ m}^2$  pour un vantail et d'environ  $0,38 \text{ m}^2$  pour le portail en totalité.