

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. Déterminons une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ :

Ici: •  $f(x) = ke^{-kx}$

•  $Df = [0; +\infty[$ .

Sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  ssi:

$$F'(x) = f(x).$$

Pour  $x \in [0; +\infty[$ , prenons:  $F(x) = -e^{-kx}$ .

$F$  est bien une primitive de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  car:

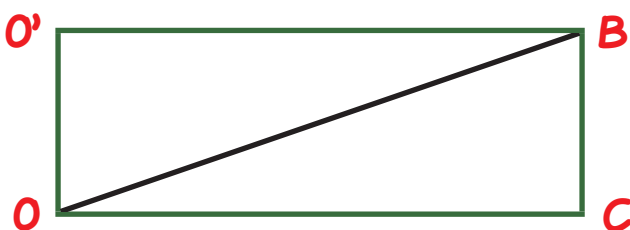
$$F'(x) = -(-k)e^{-kx} \iff F'(x) = ke^{-kx} \text{ cad: } F'(x) = f(x).$$

Ainsi, une primitive de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$  est:  $F(x) = -e^{-kx}$ .

2. a. Exprimons l'aire du triangle OCB en fonction de  $k$ :

Le triangle OCB est rectangle en C.

L'aire du triangle OCB est égale à la moitié de l'aire du rectangle OO'BC, O' étant le point de coordonnées:  $x_{O'} = 0$  et  $y_{O'} = ke^{-0 \cdot k} = k$ .



•  $O(0; 0)$

•  $O'(0; k)$

, avec: •  $B(1; ke^{-k})$

•  $C(1; 0)$

Or, l'aire du rectangle  $OO'BC$  est:  $\mathcal{A}_R = OC \times BC$   
 $= 1 \times ke^{-k}$ .

Dans ces conditions, l'aire du triangle  $OCB$  est:  $\mathcal{A}_T = \frac{ke^{-k}}{2}$ .

Au total, en fonction de  $k$ , l'aire du triangle  $OCB$  est:  $\mathcal{A}_T = \frac{ke^{-k}}{2}$ .

## 2. b. Exprimons, en fonction de $k$ , l'aire du domaine $\mathcal{D}$ :

L'aire du domaine  $\mathcal{D}$  délimité par l'axe des ordonnées, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et le segment  $[OB]$  est égale à:

$$\mathcal{A}_D = \left( \int_0^1 f(x) dx \right) - \mathcal{A}_T.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ , elle admet donc des primitives sur  $[0; 1]$

et par conséquent:  $\int_0^1 f(x) dx$  existe.

$$\begin{aligned} \text{Ici: } \int_0^1 f(x) dx &= [F(x)]_0^1 \\ &= [-e^{-kx}]_0^1 \\ &= (-e^{-k}) - (-e^0) \\ &= 1 - e^{-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  est:  $\mathcal{A}_D = (1 - e^{-k}) - \left(\frac{ke^{-k}}{2}\right)$

$$= \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}.$$

Au total, l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  est:  $\mathcal{A}_D = \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}$  u.a.

3. Montrons qu'il existe une unique valeur du réel  $k > 0$  telle que l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  vaut le double de celle du triangle OCB:

L'aire du domaine  $\mathcal{D}$  est égale au double de celle du triangle OCB quand:

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T.$$

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T \iff \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2} = 2 \times \left( \frac{ke^{-k}}{2} \right)$$

$$\iff 2 - 2e^{-k} - ke^{-k} = 2ke^{-k}$$

$$\iff -3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2 = 0.$$

Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:  $g(k) = -3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2$ .

Il s'agit de montrer que l'équation  $g(k) = 0$  admet une unique solution strictement positive que nous noterons:  $\theta$ .

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $w$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = w$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = w$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = w$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $g$  est continue sur  $[0; +\infty[$ , donc sur  $]\frac{1}{3}; +\infty[$ .

• " $w = 0$ " est compris entre:  $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,15$

$$\text{et: } \lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 2, \text{ car: } \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-k} = 0.$$

- $g$  est strictement croissante sur  $] \frac{1}{3}; +\infty [$  car pour tout  $k \in ] \frac{1}{3}; +\infty [$ :

$$g'(k) = -e^{-k} + 3ke^{-k} > 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $g(k) = 0$  ( $w = 0$ ) admet une **unique** solution  $\theta$  appartenant à  $] \frac{1}{3}; +\infty [$ . **Donc**  $\theta > 0$ .

**Au total:**  $g(k) = 0$  admet une unique solution  $\theta$  sur  $] \frac{1}{3}; +\infty [$  et elle est donc strictement positive.