

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. a. Calculons  $f(20)$ :

Ici: •  $f(t) = (0,8t + 0,2) e^{-0,5t} + 0,03$

•  $Df = [0; 20]$ .

Dans ces conditions:  $f(20) = (0,8 \times 20 + 0,2) e^{-0,5 \times 20} + 0,03$

$$= 16,2 e^{-10} + 0,03$$

$$\approx 0,031.$$

Ainsi:  $f(20) \approx 0,031$ .

Cela signifie que le taux de  $\text{CO}_2$  au bout de 20 minutes est d'environ 3,1%.

1. b. Déterminons le taux maximal de  $\text{CO}_2$  présent dans le local pendant l'expérience:

D'après le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[0; 20]$ , nous constatons que le maximum de  $f$  est atteint au point  $M(1,75; f(1,75))$ .

Or:  $f(1,75) \approx 0,697$ .

Ainsi: le taux maximal de  $\text{CO}_2$  présent dans le local pendant l'expérience est d'environ 69,7%.

## 2. a. Justifions qu'il existe un unique instant $T$ satisfaisant cette condition:

Il s'agit de démontrer que l'équation  $V = f(t) = 3,5\%$  admet une unique solution strictement positive que nous noterons:  $T$ .

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $[0; 20]$ , donc sur  $]1,75; 20]$ .

- " $k = 3,5\%$ " est compris entre:  $f(20) \approx 3,1\%$

et:  $f(1,75) \approx 69,7\%$ .

- $f$  est strictement décroissante sur  $]1,75; 20]$ , d'après le tableau de variation de  $f$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(t) = 3,5\%$  ( $k = 3,5\%$ ) admet une **unique** solution  $T$  appartenant à  $]1,75; 20]$ .

**Au total:**  $f(t) = 3,5\%$  admet une unique solution  $T$  sur  $]1,75; 20]$ .

2. b. b1. Déterminons la valeur de la variable  $t$  à la fin de l'algorithme:

En programmant cet algorithme sur la calculatrice, nous obtenons comme valeur de la variable  $t$  à la fin de l'algorithme:  $t = 15,75$  minutes.

En effet: •  $f(15,65) \approx 0,0351 > 3,5\%$   
 •  $f(15,75) \approx 0,03487 < 3,5\%$ .

2. b. b2. Que représente cette valeur dans le cadre de l'exercice ?

Cela signifie que: le taux de  $CO_2$  présent dans le local pendant l'expérience est inférieur ou égal à 3,5% au delà de 15,75 minutes.

Notons que: 15,75 minutes = 15 minutes et 45 secondes.

3. a. Montrons que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0; 11]$ :

Sur l'intervalle  $[0; 11]$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  ssi:  $F'(t) = f(t)$ .

Or ici, pour tout  $t \in [0; 11]$ :

$$\begin{aligned} F'(t) &= (-1,6 \times e^{-0,5t}) + ((-1,6t - 3,6) \times (-0,5 e^{-0,5t})) + 0,03 \\ &= 0,8t e^{-0,5t} + 0,2 e^{-0,5t} + 0,03 \\ &= (0,8t + 0,2) e^{-0,5t} + 0,03 \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $t \in [0; 11]$ :  $F$  est bien une primitive de  $f$  car  $F'(t) = f(t)$ .

3. b. Dédisons-en le taux moyen  $V_m$ , valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; 11]$ :

Soit " $V_m$ ", le taux moyen ou valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; 11]$ .

$$V_m \text{ est tel que: } V_m = \frac{1}{11-0} \int_0^{11} f(x) dx.$$

$$\begin{aligned}\text{Or: } \frac{1}{11-0} \int_0^{11} f(x) dx &= \frac{1}{11} [F(x)]_0^{11} \\ &= \frac{1}{11} (F(11) - F(0))\end{aligned}$$

$$\approx 34,9\% \text{ arrondi à } 0,1\%.$$

**Au total:** le taux moyen  $V_m$  est d'environ 34,9%.

Cela signifie que le taux moyen de  $\text{CO}_2$ , dans le local pendant l'expérience, est d'environ 34,9% pendant les 11 premières minutes.