Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 27

CORRECTION

Partie A: Étude de la fonction f

1. Justifions que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}$:

Ici: • $f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)$

• $Df = \mathbb{R}$.

D'après le cours, nous savons que: • $\cos x \in [-1; 1]$,

• $\sin x \in [-1; 1]$.

Dans ces conditions: • $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ ou: $-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$,

• $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Ainsi, nous avons: $-2 \leqslant -\cos x + \sin x \leqslant 2$

$\iff -1 \leqslant -\cos x + \sin x + 1 \leqslant 3$

$\iff -e^{-x} \leqslant e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \leqslant 3e^{-x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Au total, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}$ **(1)**.

2. Déduisons-en la limite de f en $+\infty$:

D'après le cours, nous savons que: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

Ainsi: • $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$ (terme de gauche de (1))

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-x} = 0$ (terme de droite de (1)).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Au total: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

3. Calculons f' pour tout $x \in [\,-\pi\,;\,\pi\,]$:

Ici: • $f(x) = e^{-x}\,(-\cos x + \sin x + 1)$ **(u x v)**

• $Df = [\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = e^{-x}$ et $f_2(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

f_1 est dérivable sur IR, comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

f_2 est dérivable sur $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$ comme produit **($f_1 \times f_2$)** de deux fonctions dérivables sur $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

Pour tout $x \in [\,-\pi\,;\,\pi\,]$:

$f'(x) = (-e^{-x}) \times (-\cos x + \sin x + 1) + (e^{-x}) \times (\sin x + \cos x)$ **(u' x v + u x v')**

$= 2\,e^{-x}\cos x - e^{-x}$

$= e^{-x}\,(2\cos x - 1).$

Au total, pour tout $x \in [-\pi ; \pi]$: $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$.

4. a. Déterminons le signe de f' sur $[-\pi ; \pi]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-\pi ; \pi]$, **sachant que**: $e^{-x} > 0$.

- **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $e^{-x}(2\cos x - 1) = 0 \iff 2\cos x - 1 = 0$

$$\iff \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}.$$

- **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $e^{-x}(2\cos x - 1) < 0 \iff 2\cos x - 1 < 0$

$$\iff \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\iff x \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3} ; \pi\right].$$

- **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $e^{-x}(2\cos x - 1) > 0 \iff 2\cos x - 1 > 0$

$$\iff \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\iff x \in \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[.$$

4. b. Déduisons-en les variations de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$:

D'après les 3 cas précédents, nous pouvons en déduire que:

- f est décroissante sur $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$,
- f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

Partie B: Aire du logo

1. Etudions la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - g(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x}\cos x$

$$= e^{-x}(\sin x + 1).$$

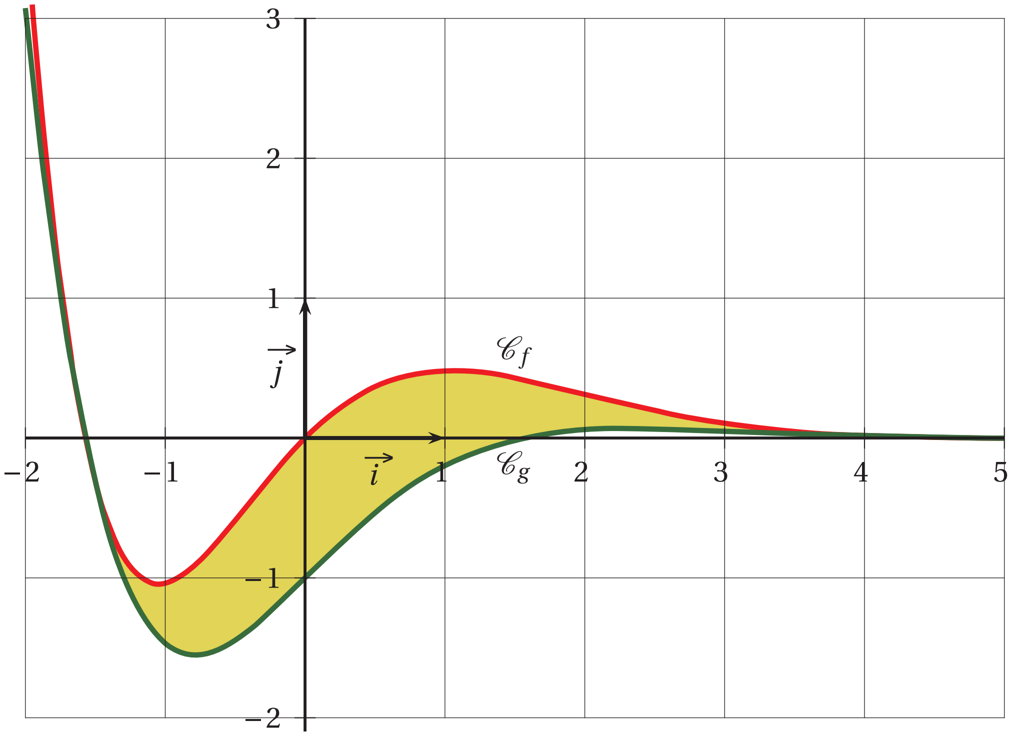
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $e^{-x} > 0$,
- $\sin x + 1 \geqslant 0$, car: $\sin x \in [-1\,;1]$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x}(\sin x + 1) \geqslant 0$ cad: $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

Au total, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$: la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

2. a. Hachurons le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique fourni en annexe:

Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré en jaune est le suivant:



2. b. b1. Calculons l'aire du domaine $\mathscr{D}$:

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ correspond à:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x))\, dx.$$

Or: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-x}(\sin x + 1)\, dx$

$$= [\,H(x)\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)e^{-x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}\right).$$

Au total, la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est: $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$ u.a.

2. b. b2. Donnons une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 de l'aire de $\mathcal{D}$:

En cm^2 et à 10^{-2} près, une valeur approchée du domaine $\mathcal{D}$ est d'environ:

9, 6 cm^2.