

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

Partie A: Étude Graphique

1. Résolvons graphiquement  $f(x) > 0$ :

Graphiquement,  $f(x) > 0$  à partir du moment où:  $x > 0,5$ .

Au total:  $f(x) > 0$  ssi  $x \in ]0,5;6]$ .

2. Donnons la valeur approchée du maximum de  $f$  sur l'intervalle  $[0;6]$ :

Graphiquement, le maximum de  $f$  est atteint quand  $x = 1,5$ .

Quand  $x = 1,5$ ,  $f(x) \in [2;2,5]$ .

Au total, une valeur approchée du maximum de  $f$  sur  $[0;6]$  est:  $y_{\max} \approx 2,25$ .

3. Déterminons, en justifiant, le signe de  $f'$  sur  $[2;6]$ :

Graphiquement, la courbe représentative de  $f$  décroît sur  $[2;6]$ .

D'où,  $f$  est décroissante sur  $[2;6]$  et ainsi nous pouvons affirmer que:

pour tout  $x \in [2;6]$ ,  $f'(x) < 0$ .

Au total: pour tout  $x \in [2;6]$ ,  $f'(x) < 0$ .

4. Déterminons pour quelle raison on peut penser que la courbe admet un point d'inflexion:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Graphiquement, sur  $[0;2]$ , la courbe est située sous ses tangentes et, sur  $[3,5;6]$ , elle est située au dessus de ses tangentes.

Il semble donc que sur l'intervalle  $[0;6]$ , et plus exactement sur  $[2;6]$ , la fonction va passer de concave à convexe.

D'où,  $f''$  va s'annuler et changer de signe et ainsi nous pouvons affirmer que:

$f$  admet un point d'inflexion sur l'intervalle  $[2;6]$ .

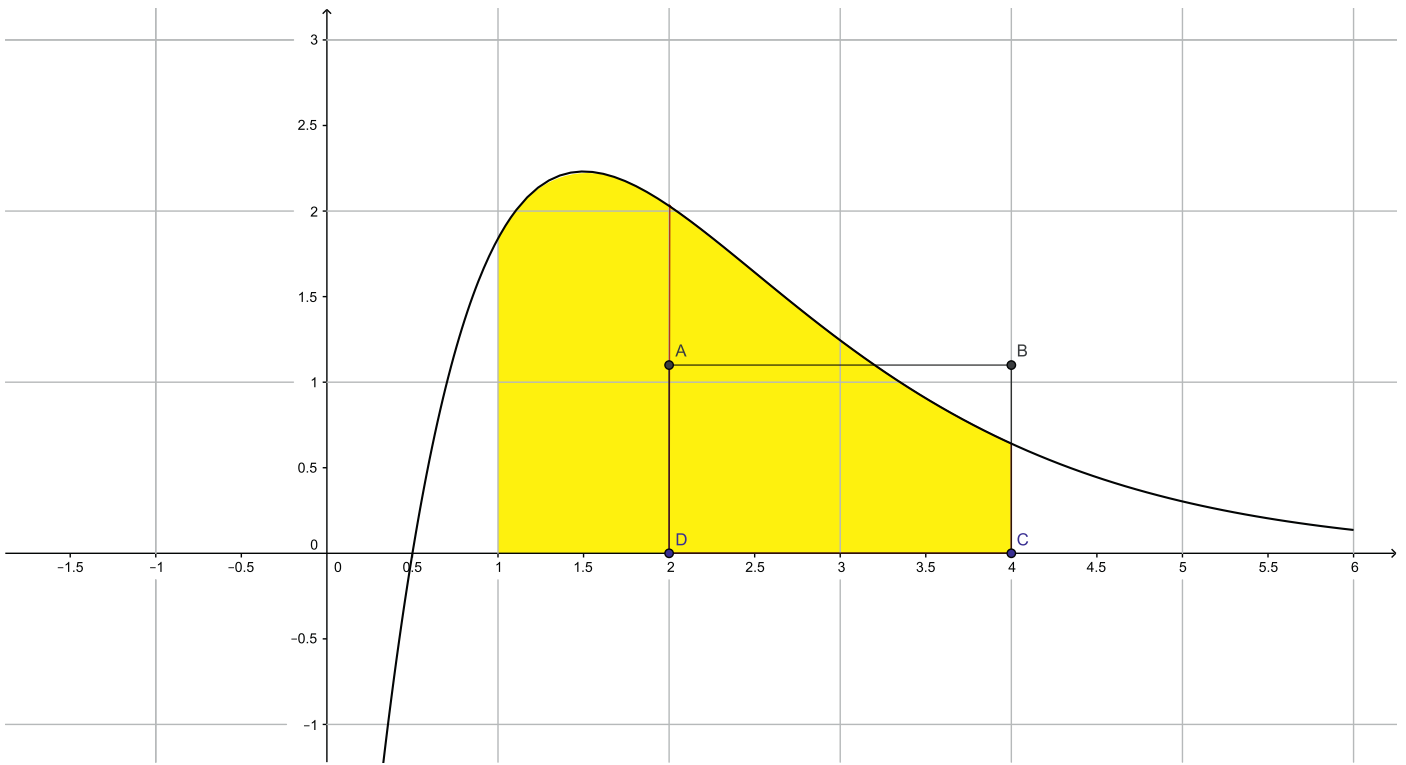
**Au total:**  $f$  admet donc un point d'inflexion.

5. Donnons un encadrement par 2 entiers consécutifs de  $\mathcal{A} = \int_1^4 f(x)dx$ :

Soit  $\mathcal{A}$  l'aire correspondante à:  $\int_1^4 f(x)dx$ .

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 4$ , est telle que:  $4 < \mathcal{A} < 5$ .

Nous pouvons représenter cette aire  $\mathcal{A}$ , en jaune, sur le graphique suivant:



Au total, l'aire demandée  $\mathcal{A}$  est telle que:  $4 < \mathcal{A} < 5$ .

## Partie B: Étude Analytique

1. Dressons le tableau de variation:

**Étape 1:**  $f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$ , sur  $[0; 6]$ .

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $x$  de  $[0; 6]$ , sachant que:  $e^{-x} > 0$ .

• **1<sup>er</sup> cas:**  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \quad \text{ssi} \quad (-10x + 15)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -10x + 15 = 0, \quad \text{cad:} \quad x = \frac{3}{2}.$$

• **2<sup>eme</sup> cas:**  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \quad \text{ssi} \quad (-10x + 15)e^{-x} < 0$$

$$\Leftrightarrow -10x + 15 < 0, \quad \text{cad:} \quad x > \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x \in ]\frac{3}{2}; 6].$$

• 3<sup>eme</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-10x + 15)e^{-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow -10x + 15 > 0, \text{ cad: } x < \frac{3}{2} \text{ ou } x \in [0; \frac{3}{2}[.$$

Au total: •  $f$  est croissante sur  $[0; \frac{3}{2}]$ ,

(car sur  $[0; \frac{3}{2}]$ ,  $f'(x) \geq 0$ )

•  $f$  est décroissante sur  $[\frac{3}{2}; 6]$ .

(car sur  $[\frac{3}{2}; 6]$ ,  $f'(x) \leq 0$ )

**Étape 2:** Le tableau de variation.

Nous pouvons dresser le tableau de variation suivant:

$x$	0	$\frac{3}{2}$	6
$f'$	+	0	-
$f$			

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = -5$ ,

•  $b = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 10e^{-3/2} > 0$ ,

•  $c = f(6) \Rightarrow c = 55e^{-6} > 0$ .

**Étape 3:** La valeur de l'extremum.

Soit  $E(x_E; y_E)$ , l'extremum de  $f$  sur  $[0; 6]$ .

$x_E$  est tel que:  $f'(x_E) = 0$ .

$$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = \frac{3}{2} \text{ et donc } y_E = 10e^{-3/2}.$$

**Au total:** le point  $E\left(\frac{3}{2}; 10e^{-3/2}\right)$  est l'extremum de  $f$  sur  $[0;6]$ .

## 2. Étudions la convexité de $f$ sur $[0;6]$ :

Ici: •  $f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$

•  $f''(x) = (10x - 25)e^{-x}$ .

Or: •  $f$  est convexe sur  $[0;6]$  ssi: pour tout  $x \in [0;6]$ ,  $f''(x) \geq 0$ .

•  $f$  est concave sur  $[0;6]$  ssi: pour tout  $x \in [0;6]$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0;6]$ , sachant que:  $e^{-x} > 0$ .

• **1<sup>er</sup> cas:**  $f''(x) \geq 0$ .

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } (10x - 25)e^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10x - 25 \geq 0, \text{ cad: } x \geq \frac{5}{2} \text{ ou } x \in \left[\frac{5}{2}; 6\right].$$

• **2<sup>eme</sup> cas:**  $f''(x) \leq 0$ .

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } (10x - 25)e^{-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 10x - 25 \leq 0, \text{ cad: } x \leq \frac{5}{2} \text{ ou } x \in \left[0; \frac{5}{2}\right].$$

**Au total:** •  $f$  est concave sur  $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ ,

•  $f$  est convexe sur  $\left[\frac{5}{2}; 6\right]$ .

## 3. Montrons que $F$ est une primitive de $f$ sur $[0;6]$ :

$$F(x) = (-10x - 5)e^{-x}.$$

Ici:  $f$  est continue sur  $[0;6]$ . Elle admet donc une primitive  $F$  dérivable sur

l'intervalle  $[0;6]$  et  $F$  est telle que:  $F' = f$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0;6], \quad F'(x) &= -10e^{-x} - (-10x - 5)e^{-x} \\ &\Rightarrow F'(x) = (10x - 5)e^{-x}. \end{aligned}$$

Au total, on a bien pour tout  $x \in [0;6]$ :  $F$  est une primitive de  $f$  car  $F' = f$ .

4. Déduisons-en la valeur exacte puis une valeur approchée au centième

de  $I = \int_2^4 f(x)dx$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $I = \int_2^4 f(x)dx$ .

$f$  est continue sur  $[0;6]$ , elle admet donc des primitives sur  $[0;6]$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$I = \int_2^4 (10x - 5)e^{-x} dx$$

$$= [(-10x - 5)e^{-x}]_2^4$$

$$\Rightarrow I = 25e^{-2} - 45e^{-4}.$$

En arrondissant au centième, nous obtenons:  $I \approx 2,56$ .

Au total, l'aire exacte demandée est:  $I = 25e^{-2} - 45e^{-4}$  ou  $I \approx 2,56$ .

5. Déterminons, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle:

La hauteur AD de ce rectangle correspond à la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[2;4]$ .

Soit " $m$ ", la valeur moyenne de  $f$  sur  $[2;4]$ .

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(x) dx.$$

$$m = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(x) dx \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \times 1$$

$$\Rightarrow m \approx 1,28.$$

Au total, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle est:  $m \approx 1,28$ .