Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 23

CORRECTION

Partie A:

1. Encadrons chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 7]$:

L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 7]$.

Soient x_1 et x_2 ces deux solutions.

Les deux encadrements (par 2 entiers consécutifs) des solutions x_1 et x_2 sont respectivement: $[0; 1]$ et $[2; 3]$.

2. Donnons le maximum de f sur l'intervalle $[0; 7]$ en précisant la valeur en laquelle il est atteint:

La fonction f atteint son maximum quand: $x = 1$.

Quand $x = 1$: $f(1) \approx 14,8$.

Au total: f est maximum quand $x = 1$ et en ce point $f_{max} \approx 14,8$.

3. Déterminons à quel intervalle appartient l'intégrale:

Ici: $I = \int_1^3 f(x)\,dx$.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A} = I$ du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, est telle que: $18 < \mathscr{A} < 26$ (plus de 23 carreaux et moins de 26 carreaux, en comptant).

Au total, nous retiendrons l'intervalle: $[\ 18\ ;\ 26\ ]$.

Partie B:

1. Déterminons $f\,'$ pour tout réel x de l'intervalle $[\ 0\ ;\ 7\ ]$:

Ici: • $f(x) = 2x\ e^{-x+3}$ **(u x v)**

• $Df = [\ 0\ ;\ 7\ ]$

• f est définie et dérivable sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 7\ ]$.

Comme f est dérivable sur $[\ 0\ ;\ 7\ ]$, nous pouvons calculer $f\,'$:

Pour tout $x \in [\ 0\ ;\ 7\ ]$: $f'(x) = 2 \times e^{-x+3} + 2x \times (-e^{-x+3})$ **(u' x v + u x v')**

$$\Rightarrow\ f'(x) = e^{-x+3} \times (-2x + 2).$$

Au total, pour tout $x \in [\ 0\ ;\ 7\ ]$: $f'(x) = (-2x + 2) \times e^{-x+3}$.

2. a. Étudions le signe de $f\,'$ sur $[\ 0\ ;\ 7\ ]$ et dressons le tableau de variation de f:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\ 0\ ;\ 7\ ]$:

• **1^er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} = 0$

$\Leftrightarrow\ -2x + 2 = 0^{*}$, cad: $x = 1$.

• **2^ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} < 0$

$\Leftrightarrow\ -2x + 2 < 0^{*}$, cad: $x > 1$ ou $x \in]\ 1\ ;\ 7\ ]$.

• **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} > 0$

<=> $-2x + 2 > 0^{*}$, cad: $x < 1$ ou $x \in [0; 1[$.

(*: car pour tout $x \in [0; 7]$, $e^{-x+3} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[0; 1]$,

(car sur $[0; 1]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[1; 7]$.

(car sur $[1; 7]$, $f'(x) \leq 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		1		7
f'		$+$	0	$-$	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0)$ => $a = 0$,

• $b = f(1)$ => $b = 2e^{2}$ ($\approx 14,78$),

• $c = f(7)$ => $c = 14e^{-4}$ ($\approx 0,26$).

2. b. Calculons le maximum de f sur l'intervalle $[0; 7]$:

Le maximum de f sur $[0; 7]$ est atteint quand $f'(x) = 0$.

Or: $f'(x) = 0$ quand $x = 1$.

Ainsi: le point $A(1; 2e^{2})$ est le maximum de f sur $[0; 7]$.

3. a. Justifions que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions α et β sur l'intervalle $[0; 7]$:

Pour cela, nous allons dresser un nouveau tableau de variation:

x	0		α		1		β		7
f'		$+$			0			$-$	
f	a	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	c

Avec: • $a = 0$,

• $b \approx 14,78$,

• $c \approx 0,26$,

• $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Le nouveau tableau de variation nous montre qu'il existe bien deux solutions α et β telles que: $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Au total α et β existent bien avec: $\alpha \in [0; 1]$ et $\beta \in [1; 7]$.

3. b. Donnons une valeur approchée de β sachant que $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près:

Par tâtonnement, nous trouvons: $\beta \approx 2,16$ à 10^{-2} près.

Au total, à 10^{-2} près: $\alpha \approx 0,36 \in [0; 1]$ et $\beta \approx 2,16 \in [1; 7]$.

4. a. Justifions que F est une primitive de f sur $[0; 7]$:

Sur l'intervalle $[0; 7]$, F est une primitive de f ssi: $F'(x) = f(x)$.

Ici: $F(x) = (-2x - 2)\, e^{-x+3}$ $(u \times v)$.

D'où: $F'(x) = -2 \times e^{-x+3} + (-2x - 2) \times (-e^{-x+3})$ $(u' \times v + u \times v')$

=> $F'(x) = 2x \times e^{-x+3}$.

Au total: F est bien une primitive de f car $F'(x) = f(x)$.

4. b. Calculons l'aire demandée:

Ici, il s'agit de calculer: $\mathscr{A} = \int_1^3 f(x)\, dx$.

Nous avons: $\mathscr{A} = [F(x)]_1^3$

=> $\mathscr{A} = -8 + 4e^2$ u a ou $\mathscr{A} \approx 21,55$ u a

Au total, la valeur exacte de l'aire demandée est: $\mathscr{A} = -8 + 4e^2$ u a

5. a. Calculons la valeur moyenne du bénéfice:

Soit " m ", la valeur moyenne de f sur $[1; 3]$.

m est telle que: $m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x)\, dx$.

Or: $\int_1^3 f(x)\, dx = \mathscr{A}$.

D'où la valeur moyenne du bénéfice est: $\frac{1}{3-1} \times \mathscr{A} \times 1000$ €.

Au total, la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près est: m = 10 778 €.

5. b. Déterminons le nombre d'objets que l'entreprise devra vendre:

Pour atteindre l'objectif fixé, le nombre d'objets que doit vendre l'entreprise devra être compris entre α et β.

Ainsi, le nombre d'objets doit être compris entre: 36 et 216.