

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Montrons que, pour tout $x \in [0; 4]$, $f'(x) = (-2, 16x + 2, 16) e^{-0,6x}$:

Ici: • $f(x) = (3, 6x + 2, 4) e^{-0,6x} - 1, 4$ $(u \times v) - 1, 4$

• $Df = [0; 4]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = 3, 6x + 2, 4$, $f_2(x) = e^{-0,6x}$

et $f_3(x) = -1, 4$.

f est dérivable sur $[0; 4]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[0; 4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 4]$.

Pour tout $x \in [0; 4]$:

$$f'(x) = (3, 6) \times (e^{-0,6x}) + (3, 6x + 2, 4) \times (-0,6 e^{-0,6x}) \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$= 3, 6 e^{-0,6x} - 2, 16x e^{-0,6x} - 1, 44 e^{-0,6x}$$

$$= (-2, 16x + 2, 16) e^{-0,6x}.$$

Au total, pour tout $x \in [0; 4]$, nous avons bien: $f'(x) = (-2, 16x + 2, 16) e^{-0,6x}$.

2. a. Etudions le signe de $f'(x)$ sur $[0; 4]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 4]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-2,16x + 2,16 = 0$, cad: $x = 1$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,6x} > 0$)

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-2,16x + 2,16 < 0$, cad: $x \in]1; 4]$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,6x} > 0$)

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-2,16x + 2,16 > 0$, cad: $x \in [0; 1[$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,6x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[0; 1]$,

(car sur $[0; 1]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[1; 4]$.

(car sur $[1; 4]$, $f'(x) \leq 0$)

2. b. Dressons le tableau de variations de f sur $[0; 4]$:

Sur $[0; 4]$, le tableau de variations de f est le suivant:

	0	1	4	
		+	0	-
			$a \rightarrow b$	$b \rightarrow c$

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 1,$

• $b = f(1) \Rightarrow b = 6e^{-0,6} - 1,4 \approx 1,89,$

• $c = f(4) \Rightarrow c = 16,8e^{-2,4} - 1,4 \approx 0,12.$

3. a. Calculons la valeur exacte de $\int_0^4 f(x) dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^4 f(x) dx.$

f est continue sur $[0; 4]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 4]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^4 f(x) dx$$

$$= [F(x)]_0^4$$

$$= [(-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x]_0^4$$

$$= 8,4 - 38e^{-2,4}.$$

Au total, une valeur exacte de I est: $I = 8,4 - 38e^{-2,4}.$

3. b. Déterminons une valeur approchée de I :

Une valeur approchée de I est: $I \approx 4,95.$

Partie B:

1. Montrons que $\int_0^{0,5} g(x) dx = \frac{1}{6}$:

Ici, il s'agit de calculer: $J = \int_0^{0,5} g(x) dx.$

g est continue sur $[0; 0,5]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 0,5]$ et par conséquent: J existe.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{0,5} g(x) dx \\ &= \int_0^{0,5} (4x^2 - 4x + 1) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x \right]_0^{0,5} \\ &= \frac{4}{3} (0,5)^3 - 2 (0,5)^2 + 0,5 \\ &= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{8} \right) - 2 \times \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien: $J = \frac{1}{6}$.

2. Calculons une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine:

L'aire demandée \mathcal{A} est égale à deux fois l'aire du domaine colorié située au dessus de l'axe des abscisses.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } \mathcal{A} &= 2 \times \left(\int_0^4 f(x) dx - \int_0^{0,5} g(x) dx \right) \\ &= 2 \times (I - J). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \mathcal{A} &\approx 2 \times \left(4,95 - \frac{1}{6} \right) \\ &\approx 9,57. \end{aligned}$$

Au total, une valeur approchée de l'aire du domaine colorié est:

$$\mathcal{A} \approx 9,57 \text{ unités d'aire.}$$