

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude d'une fonction

1. a. Montrons que $f'(x) = -36x \ln x$:

Ici: • $f(x) = 9x^2(1 - 2 \ln x) + 10$

• $Df =]0; 1, 5]$

Posons: $f = f_1 \times (1 - 2f_2) + f_3$, avec: $f_1(x) = 9x^2$, $f_2(x) = \ln x$ et $f_3(x) = 10$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0; 1, 5]$

f_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme fonction "ln", donc dérivable sur $]0; 1, 5]$.

Par conséquent, $h = f_1 \times (1 - 2f_2)$ est dérivable sur $]0; 1, 5]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0; 1, 5]$.

Donc, f est dérivable sur $]0; 1, 5]$ comme somme $(h + f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0; 1, 5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; 1, 5]$.

$$\text{Pour tout } x \in]0; 1, 5]: f'(x) = 18x(1 - 2 \ln x) + 9x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -36x \ln x.$$

Au total: pour tout $x \in]0;1,5]$, $f'(x) = -36x \ln x$.

1. b. Étudions le signe de f' sur $]0;1,5]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $]0;1,5]$:

• **1^{er} cas:** $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -36x \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ (car } x \neq 0), \text{ cad: } x = 1.$$

• **2^{eme} cas:** $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } -36x \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0, \text{ cad: } x \in]1;1,5].$$

• **3^{eme} cas:** $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } -36x \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0, \text{ cad: } x \in]0;1[.$$

Au total: • f est croissante sur $]0;1]$,

(car sur $]0;1]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[1;1,5]$.

(car sur $[1;1,5]$, $f'(x) \leq 0$)

1. c. Déduisons-en les variations de f sur $]0;1,5]$:

Comme nous l'avons déjà dit: • f est croissante sur $]0;1]$,

• f est décroissante sur $[1;1,5]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0	1	1,5	
f'		+	0	-
f			b	
	a			c

Avec: • $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow a = -\infty,$

• $b = f(1) \Rightarrow b = 19,$

• $c = f(1,5) \Rightarrow c = 30,25 - 40,5 \ln(1,5) > 0.$

2. Montrons que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1} :

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Ici: $f''(x) = -36 \ln x - 36$, pour tout $x \in]0;1,5]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in]0;1,5]$:

• 1^{er} cas: $f''(x) = 0.$

$f''(x) = 0$ ssi $-36 \ln x - 36 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$, cad: $x = e^{-1}.$

• 2^{eme} cas: $f''(x) < 0.$

$f''(x) < 0$ ssi $-36 \ln x - 36 < 0 \Leftrightarrow \ln x > -1$, cad: $x > e^{-1}.$

• 3^{eme} cas: $f''(x) > 0.$

$f''(x) > 0$ ssi $-36 \ln x - 36 > 0 \Leftrightarrow \ln x < -1$, cad: $x < e^{-1}.$

Au total: la dérivée seconde s'annule et change bien de signe quand $x = e^{-1}.$

Donc la courbe représentative f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est:

$$x = e^{-1}.$$

3. a. Montrons que F est une primitive de f sur $]0;1,5]$:

$$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x$$

Ici: f est continue sur $]0;1,5]$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur l'intervalle $]0;1,5]$ et F est telle que: $F' = f$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in]0;1,5], \quad F'(x) &= 10 + 15x^2 - (18x^2 \ln x + 6x^3 \times \left(\frac{1}{x}\right)) \\ &\Leftrightarrow F'(x) = 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln(x) \\ &\Rightarrow F'(x) = 9x^2 (1 - 2 \ln x) + 10. \end{aligned}$$

Au total, on a bien, pour tout $x \in]0;1,5]$: F est une primitive de f car $F' = f$.

3. b. Calculons $\int_1^{1,5} f(x) dx$:

$$\text{Ici, il s'agit de calculer: } I = \int_1^{1,5} f(x) dx.$$

f est continue sur $]1;1,5]$, elle admet donc des primitives sur $]1;1,5]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_1^{1,5} [9x^2 (1 - 2 \ln x) + 10] dx$$

$$= [10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x]_1^{1,5}$$

$$\Rightarrow I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5).$$

En arrondissant au centième, nous obtenons: $I \approx 8,66$.

Au total, l'aire exacte demandée est: $I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5)$ ou $I \approx 8,66$.

Partie B: Application économique

Proposition 1: " Sur la période des 6 derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur ".

C'est vrai.

Justifions le.

La période des 6 derniers mois correspond à l'intervalle: $[1; 1,5]$.

Or, le pourcentage de variation entre $t = 1$ et $t = 1,5$ est: $\frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100$.

$$\frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 = \frac{13,83 - 19}{19} \times 100$$

$$\Rightarrow \frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 \approx -27,21\%$$

Dans ces conditions, le prix de l'action en $t = 1,5$ est de:

$$P_{1,5} = P_1 (1 - 27,21\%)$$

$$\Leftrightarrow P_{1,5} = 19 (1 - 27,21\%)$$

$$\Rightarrow P_{1,5} \approx 13,83 \text{ €}.$$

Au total, l'action a bien perdu plus d'un quart de sa valeur: $27,21\% > 25\%$.

Proposition 2: " Sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 € ".

C'est faux.

Justifions le.

Pour justifier notre réponse, nous allons calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1; 1,5]$.

Soit " m ", la valeur moyenne de f sur $[1; 1,5]$.

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{1,5 - 1} \int_1^{1,5} f(x) dx.$$

$$m = \frac{1}{1,5 - 1} \int_1^{1,5} f(x) dx \iff m = 2 \int_1^{1,5} f(x) dx$$

$$\iff m = 2 [F(x)]_1^{1,5}$$

$$\Rightarrow m \approx 17,33 \text{ €} > 17 \text{ €}.$$

Au total, sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été supérieure à 17 €.