

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Résolvons graphiquement et de façon approchée $f(x) = 3000$:

A l'aide du graphique: $f(x) = 3000$ quand $x = 6, 4$.

(3 gros carrés et 2 petits carrés)

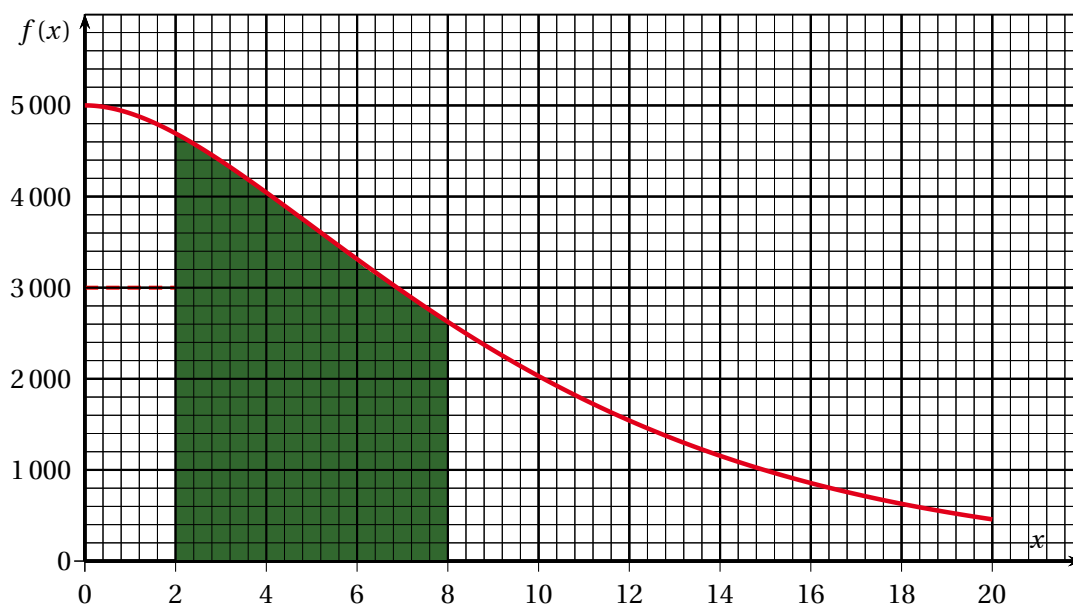
Graphiquement, l'équation $f(x) = 3000$ admet pour solution: $x = 6, 4$.

2. Donnons graphiquement une valeur approchée de $\int_2^8 f(x) dx$:

$\int_2^8 f(x) dx$ correspond, en unités d'aire et à l'unité près, à l'aire du domaine compris entre la courbe (\mathcal{C}_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 8$.

Soit \mathcal{D} le domaine correspondant à $\int_2^8 f(x) dx$ sur le graphique.

Le domaine \mathcal{D} est représenté par la surface verte sur le graphique suivant:



En comptant le nombre de carreaux, on obtient:

- 9 gros carreaux de 25 petits carreaux
- + • 46 petits carreaux.

Soit un total de: **271 petits carreaux.**

Or, en unités d'aire, un petit carreau représente: $\frac{2 \times 1000}{25} = 80.$

Dans ces conditions: $271 \times 80 = 21680$ unités d'aire.

Au total, une valeur approchée de $\int_2^8 f(x) dx$ est: 21680 unités d'aire.

Partie B: Étude théorique

1. Démontrons que pour tout x de $[0; 20]$, $f'(x) = -200x e^{-0,2x}$:

Ici: • $f(x) = 1000(x + 5) e^{-0,2x}$ (u x v)

• $Df = [0; 20]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = 1000(x + 5)$ et $f_2(x) = e^{-0,2x}$.

f est dérivable sur $[0; 20]$ car f_1 et f_2 sont dérivables sur $[0; 20]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 20]$.

Pour tout $x \in [0; 20]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1000) \times (e^{-0,2x}) + (1000(x + 5)) \times (-0,2e^{-0,2x}) && (u' \times v + u \times v') \\ &= -200x e^{-0,2x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in [0; 20]$, nous avons bien: $f'(x) = -200x e^{-0,2x}$.

2. a. Déduisons-en le sens de variation de f sur $[0; 20]$:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 20]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -200x e^{-0,2x} = 0, \text{ cad: } x = 0.$$

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,2x} > 0$)

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } -200x e^{-0,2x} < 0, \text{ cad: } x \in]0; 20].$$

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,2x} > 0$)

Au total: • f est décroissante sur $[0; 20]$.

(car sur $[0; 20]$, $f'(x) \leq 0$)

2. b. Dressons le tableau des variations de f sur $[0; 20]$:

Le tableau des variations de f sur $[0; 20]$ est le suivant:

x	0	20
f'	0	-
f	a	b

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 5000$,

• $b = f(20) \Rightarrow b = 25000 e^{-4}$.

3. a. Montrons que sur $[0; 20]$, l'équation $f(x) = 3000$ admet une solution unique:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

• Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[0; 20]$, donc sur $]0; 20[$.

• " $k = 3000$ " est compris entre: $f(20) = 25000 e^{-4}$

et: $f(0) = 5000$.

• f est strictement décroissante sur $]0; 20[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 3000$ ($k = 3000$) admet une **unique** solution α appartenant à $]0; 20]$.

Au total: $f(x) = 3000$ admet exactement une solution unique α sur $]0; 20]$.

3. b. Donnons une valeur approchée de α à l'aide de la calculatrice:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur approchée de α :

$$\alpha \approx 6,88 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Au total: $\alpha \approx 6,88$ à 10^{-2} près, avec: $\alpha \in]0; 20]$.

4. Calculons $\int_2^8 f(x) dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_2^8 f(x) dx$.

f est continue sur $[2; 8]$, elle admet donc des primitives sur $[2; 8]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_2^8 f(x) dx$$

$$= [F(x)]_2^8$$

$$= [-5000 \times (x + 10) e^{-0,2x}]_2^8$$

$$= (-5000 (18) \times e^{-1,6}) - (-5000 \times (12) \times e^{-0,4})$$

$$= -90000 e^{-1,6} + 60000 e^{-0,4}.$$

Au total: • Une valeur exacte de I est: $I = -90000 e^{-1,6} + 60000 e^{-0,4}$,

- Une valeur arrondie à l'unité de I est: $I \approx 22048$.

Partie C: Application économique

1. Déterminons en dessous de quel prix unitaire, la demande est supérieure à 3000 objets:

- D'après l'énoncé:
- $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés,
 - x correspond au prix unitaire d'un objet, en euros.

Dans ces conditions, la demande est supérieure à 3000 objets quand:

$$f(x) \geq 3000.$$

Or, d'après la question Partie B, 3. b., $f(x) \geq 3000$ dès que: $x \leq 6,88$.

(la fonction f est décroissante)

Au total: la demande est supérieure à 3000 objets dès que le prix unitaire passe en dessous de **6,88 euros**.

2. Déterminons la valeur moyenne de la fonction f sur $[2; 8]$ et interprétons:

Soit m , la valeur moyenne de f sur $[2; 8]$.

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{8-2} \int_2^8 f(x) dx.$$

Or: $\int_2^8 f(x) dx \approx 22048$, d'après la question Partie B, 4.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[2; 8]$ est: $\frac{22048}{8-2} \approx 3675$.

Cela signifie que: pour un prix unitaire compris entre 2 et 8 euros, la quantité demandée sera en moyenne de 3675 objets.