Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 17

CORRECTION

1. Montrons que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$, $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$:

Ici : • $f(x) = (2x + 1)\,e^{-2x} + 3$ $\quad (u \times v) + 3$

• $Df = [-2\,;\,4]$.

Posons : $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec : $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = e^{-2x}$ et $f_3(x) = 3$.

f est dérivable sur $[-2\,;\,4]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[-2\,;\,4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2\,;\,4]$.

Pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

$f'(x) = (2) \times (e^{-2x}) + (2x + 1) \times (-2e^{-2x})$ $\quad (u' \times v + u \times v')$

$= 2e^{-2x} - 4x\,e^{-2x} - 2e^{-2x}$

$= -4x\,e^{-2x}$.

Au total, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$: $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$.

2. Etudions les variations de f :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

• **1er cas** : $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-4x\,e^{-2x} = 0$, cad : $x = 0$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

• **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-4xe^{-2x} < 0$, cad: $x \in]0; 4]$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

• **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-4xe^{-2x} > 0$, cad: $x \in [-2; 0[$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[-2; 0]$,

(car sur $[-2; 0]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[0; 4]$.

(car sur $[0; 4]$, $f'(x) \leq 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	-2		0		4
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(-2) \Rightarrow a = -3e^{4} + 3$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = 4$,

• $c = f(4) \Rightarrow c = 9e^{-8} + 3$.

3. a. Montrons que sur [-2 ; 0] l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur [a ; b].
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de [a ; b] tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à [a ; b].
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur [a ; b], l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à [a ; b].

Ici: • f est continue sur [-2 ; 0], donc sur [-2 ; 0 [.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(-2) = -3\,e^{4} + 3$

et: $f(0) = 4$.

• f est strictement croissante sur [-2 ; 0 [.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet une unique solution α appartenant à [-2 ; 0 [.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur [-2 ; 0 [.

3. b. Donnons une valeur approchée au dixième de cette solution:

Par tâtonnement, nous trouvons: $\alpha \approx -0,8$.

Au total: $\alpha \approx -0,8$.

4. a. Etudions le signe de f'' sur $[-2\,;\,4]$:

Ici: • $f(x) = (2x+1)\,e^{-2x} + 3$

• $Df = [-2\,;\,4]$

• $f''(x) = (8x-4)\,e^{-2x}$.

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2\,;\,4]$, sachant que: $e^{-2x} > 0$.

• **1[er] cas**: $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 0$ ssi $(8x-4)\,e^{-2x} = 0$, cad: $x = \dfrac{1}{2}$.

• **2[ème] cas**: $f''(x) < 0$.

$f''(x) < 0$ ssi $(8x-4)\,e^{-2x} < 0$, cad: $x \in \left[-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

• **3[ème] cas**: $f''(x) > 0$.

$f''(x) > 0$ ssi $(8x-4)\,e^{-2x} > 0$, cad: $x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right]$.

D'où le tableau de signes de f'' sur $[-2\,;\,4]$ suivant:

x	-2		$\frac{1}{2}$		4
f''		$-$	0	$+$	

4. b. Déduisons-en le plus grand intervalle sur lequel f est convexe:

Soit $[e\,;\,f]$, l'intervalle recherché.

f est convexe sur [e ; f] ssi: pour tout $x \in$ [e ; f], $f''(x) \geq 0$.

Or: $f''(x) \geq 0$ quand $x \in \left[\frac{1}{2} ; 4 \right]$.

Au total, le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est: $\left[\frac{1}{2} ; 4 \right]$.

5. a. Vérifions que G est bien une primitive de la fonction g:

Sur l'intervalle [-2 ; 4], G est une primitive de g ssi: $G'(x) = g(x)$.

Ici: $G(x) = (-x - 1)\, e^{-2x}$ **(u x v)**.

D'où: $G'(x) = (-1) \times (e^{-2x}) + (-x - 1) \times (-2e^{-2x})$ **(u' x v + u x v')**

$= -e^{-2x} + 2x e^{-2x} + 2e^{-2x}$

$= 2x e^{-2x} + e^{-2x}$ ou: $(2x + 1)\, e^{-2x}$.

Au total: G est bien une primitive de g sur [-2 ; 4].

5. b. Déduisons-en une primitive F de f:

Notons que sur [-2 ; 4]: $f(x) = g(x) + 3$.

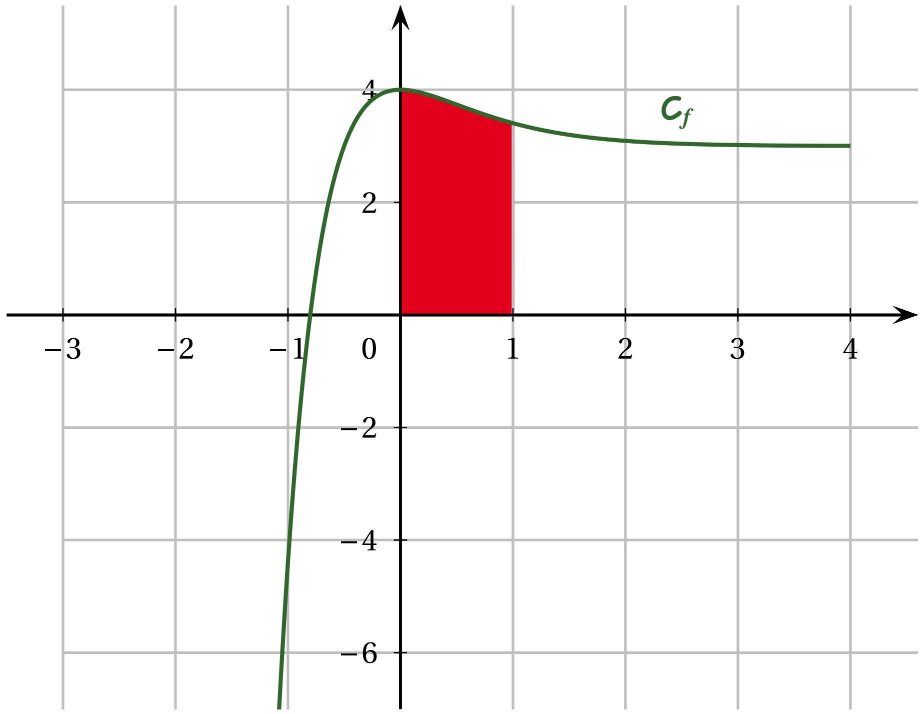
Dans ces conditions, une primitive F de f sur l'intervalle [-2 ; 4] est:

$F(x) = G(x) + 3x$ cad: $F(x) = (-x - 1)\, e^{-2x} + 3x$.

Au total: $F(x) = (-x - 1)\, e^{-2x} + 3x$ est une primitive de la fonction f.

6. a. Colorions le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique:

Le domaine $\mathcal{D}$ colorié en rouge sur le graphique est le suivant:



6. b. A l'aide du graphique, donnons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire $\mathscr{A}$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, est telle que: $3 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 4$.

Au total, l'aire demandée $\mathscr{A}$ est telle que: $3 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 4$.

6. c. c1. Calculons la valeur exacte de $\mathscr{A}$:

Ici, il s'agit de calculer: $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Or: $\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0)$.

Dans ces conditions: $\mathscr{A} = (-2e^{-2} + 3) - (-1)$

$= 4 - 2e^{-2}$.

Au total, la valeur exacte de $\mathscr{A}$ est: $\mathscr{A} = 4 - 2e^{-2}$.

6. c. c2. Calculons une valeur approchée de $\mathcal{A}$:

A l'aide d'une machine à calculer, une valeur approchée de $\mathcal{A}$ est:

$$\mathcal{A} \approx 3,73.$$

Au total, une valeur approchée de $\mathcal{A}$ est: $\mathcal{A} \approx 3,73$ au centième.