Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 15

CORRECTION

Partie A:

1. Indiquons les valeurs de $f(0)$ et $f(2)$:

D'après l'énoncé:
- A $\in \mathscr{C}_f$ avec A $(0; 2)$,
- B $\in \mathscr{C}_f$ avec B $(2; 0)$,
- C $\notin \mathscr{C}_f$ avec C $(-2; 0)$.

Dans ces conditions:
- $f(0) = f(x_A) = \mathbf{2}$,
- $f(2) = f(x_B) = \mathbf{0}$.

Ainsi: $f(0) = 2$ et $f(2) = 0$.

2. Indiquons la valeur de $f'(1)$:

$f'(1) = 0$ car la tangente au point D $(1; f(1))$ est parallèle à l'axe des abscisses. Et donc son coefficient directeur est nul.

Ainsi: $f'(1) = 0$.

3. Donnons une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A:

D'après l'énoncé:
- la droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}f$ au point A passe par les points A (0; 2) et C (-2; 0).

Soit: $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(0) = f'(x_A)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \iff a = \frac{0 - 2}{-2 - 0} \text{ cad: } a = 1.$$

Ainsi: $y = ax + b \iff y = x + b$ (1).

Or comme déjà dit, cette droite passe par le point A (0; 2).

D'où: (1) $\iff 2 = 0 + b$ **cad**: $b = 2$.

Au total, l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}f$ au point A est: $y = x + 2$.

4. Indiquons le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $[-10; 2]$:

Graphiquement, nous constatons que $f(x) = 1$ cad $y = 1$ dans deux cas:

- **quand $x \approx -1,2$,**
- **quand $x \approx 1,8$.**

Ainsi, le nombre de solutions dans l'intervalle $[-10; 2]$ est égal à: 2.

5. Indiquons les variations de f sur $[-10; 2]$:

Sur l'intervalle $[-10; 2]$:
- **f est croissante sur $[-10; 1]$,**
- **f est décroissante sur $[1; 2]$.**

Au total, les variations de f sur l'intervalle $[-10; 2]$ sont:

- f est croissante sur $[-10; 1]$

• f est décroissante sur $[\ 1\ ;\ 2\ ]$.

6. **Déterminons l'intervalle sur lequel f est convexe et celui sur lequel f est concave:**

Graphiquement, il semble que: • f est convexe sur $[\ -10\ ;\ 0\ ]$,

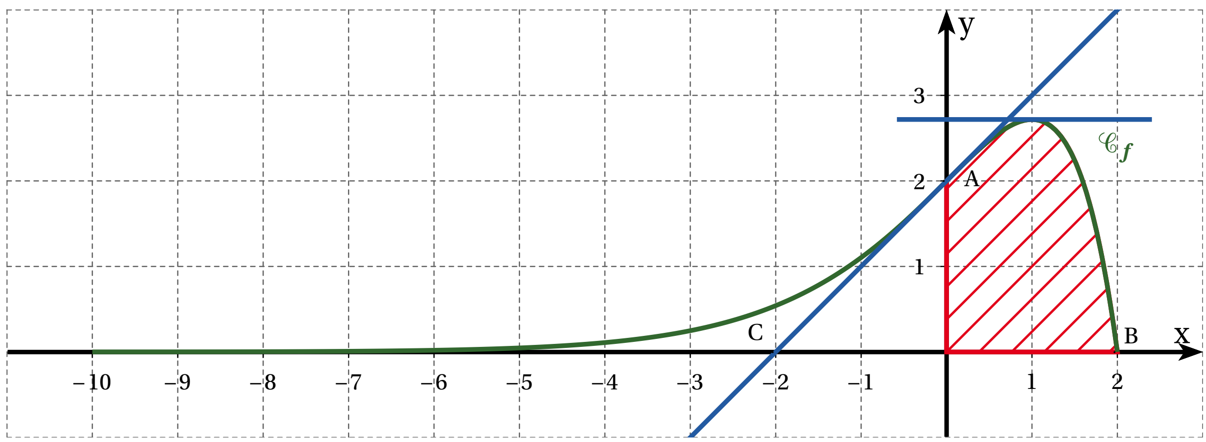
• f est concave sur $[\ 0\ ;\ 2\ ]$.

Ainsi: • f est convexe sur l'intervalle $[\ -10\ ;\ 0\ ]$,

• f est concave sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 2\ ]$.

7. a. **Hachurons le domaine du plan dont l'aire est égale à I:**

Le domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \int_0^2 f(x)\, dx$ est le suivant:



7. b. **Donnons un encadrement du nombre $I = \int_0^2 f(x)\, dx$ par deux entiers consécutifs:**

En comptant le nombre de grands carreaux, il semble que:

$$4 \leqslant I \leqslant 5.$$

Partie B:

1. a. Calculons $f(0)$ et $f(2)$:

Ici: • $f(x) = (2 - x)\, e^x$ $(u \times e^v)$

• $Df = [-10\,; 2]$.

Dans ces conditions: • $f(0) = (2 - 0)\, e^0$ **cad**: $f(0) = 2$,

• $f(2) = (2 - 2)\, e^2$ **cad**: $f(2) = 0$.

Ainsi: $f(0) = 2$ et $f(2) = 0$.

1. b. Calculons f' pour tout $x \in [-10\,; 2]$:

Ici, f est définie et dérivable sur $[-10\,; 2]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-10\,; 2]$.

Pour tout $x \in [-10\,; 2]$:

$f'(x) = (-1) \times (e^x) + (2 - x) \times (e^x)$ $(u' \times v + u \times v' \times e^v)$

$= (1 - x) \times e^x$.

Au total, pour tout $x \in [-10\,; 2]$: $f'(x) = (1 - x) \times e^x$.

1. c. Déduisons-en $f'(1)$:

Comme $f'(x) = (1 - x)\, e^x$, pour tout $x \in [-10\,; 2]$, nous avons:

$$f'(1) = 0.$$

Ainsi: $f'(1) = 0$.

2. Déterminons une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0:

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 s'écrit: $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$

$= [\,(1 - 0) \times e^0] \times (x - 0) + 2$

$= x + 2.$

Au total: $y = x + 2$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

3. a. Dressons le tableau des variations de f sur $[-10\,;2]$:

$f'(x) = (1 - x)\,e^x$, pour tout $x \in [-10\,;2]$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10\,;2]$:

- **1er cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $1 - x \leqslant 0$ **cad ssi**: $x \geqslant 1$ **ou** $x \in [\,1\,;2\,]$.

(car pour tout $x \in I\!R$, $e^x > 0$)

- **2ème cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $1 - x \geqslant 0$ **cad ssi**: $x \leqslant 1$ **ou** $x \in [-10\,;1\,]$.

(car pour tout $x \in I\!R$, $e^x > 0$)

Ainsi: • f est croissante sur $[-10\,;1\,]$,

• f est décroissante sur $[\,1\,;2\,]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	-10		1		2
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec:
- $a = 12\, e^{-10}$,
- $b = e$,
- $c = 0$.

3. b. b1. Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$, dans l'intervalle $[-10\,;\,2]$:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires **(TVI)** pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a\,;\,b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a\,;\,b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a\,;\,b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a\,;\,b]$.

Distinguons 2 cas:

1er cas: $x \in [-10\,;\,1]$.

Dans ce cas:
- f est continue sur $[-10\,;\,2]$, donc sur $[-10\,;\,1]$.
- " $k = 1$ " est compris entre: $f(-10) = 12\,e^{-10} < 1$

  et: $f(1) = e > 1$.
- f est strictement croissante sur $[-10\,;\,1[$.

Ainsi, d'après le corollaire du **TVI**, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1$ ($k = 1$) admet une unique solution α appartenant à $[-10\,;\,1[$.

2ème cas: $x \in [1\,;\,2]$.

Dans ce cas:
- f est continue sur $[-10\,;\,2]$, donc sur $[1\,;\,2]$.
- " $k = 1$ " est compris entre: $f(2) = 0 < 1$

  et: $f(1) = e > 1$.
- f est strictement décroissante sur $[1\,;\,2[$.

Ainsi, d'après le corollaire du **TVI**, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1$ ($k = 1$) admet une unique solution β appartenant à $[1\,;\,2[$.

Au total: l'équation $f(x) = 1$ admet exactement 2 solutions α et β dans l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

3. b. b2. Donnons une valeur approchée de " α " et " β " au centième près:

Une valeur approchée de α est: $\alpha \approx -1,15$.

Une valeur approchée de β est: $\beta \approx 1,84$.

4. Etudions la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geq 0$.

Or ici: $f'(x) = (1 - x) \times e^x$. **$(u \times e^v)$**

D'où: $f''(x) = (-1) \times (e^x) + (1 - x) \times (e^x)$. **$(u' \times v + u \times v' \times e^v)$**

$= -x\, e^x$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leq 0$ **ssi**: $x \geq 0$ **cad**: $x \in [\,0\,;\,2\,]$,

• $f''(x) \geq 0$ **ssi**: $x \leq 0$ **cad**: $x \in [-10\,;\,0\,]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [-10\,;\,0\,]$,

• f est concave sur $I = [\,0\,;\,2\,]$.

5. a. Vérifions que F est bien une primitive de f sur $[-10\,;\,2]$:

Sur l'intervalle $[-10\,;\,2\,]$, F est une primitive de f ssi: $F'(x) = f(x)$.

Ici: $F(x) = (3 - x)\, e^x$.

D'où pour tout $x \in [-10\,;\,2\,]$: $F'(x) = (3) \times (e^x) + (3 - x) \times (e^x)$

$= -x\, e^x = f(x)$.

Au total: F est bien une primitive de f sur $[-10\,;\,2\,]$.

5. b. Déduisons-en une valeur exacte et une valeur approchée, à 10^{-2} près, de $I = \int_0^2 f(x)\,dx$:

Ici: $I = \int_0^2 f(x)\,dx.$

D'où: $I = [\,F(x)\,]_0^2$

$= [\,(3 - x)\,e^x\,]_0^2$

$= e^2 - 3$

$\approx 4,39.$

Ainsi: • une valeur approchée de I est: **4, 39,**

• une valeur exacte de I est: $\mathbf{e^2 - 3}$.