

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Lisons graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$:

D'après l'énoncé: • f est définie et dérivable sur $[0; 30]$,

• $A(0; -11)$,

• $B(5; 0)$,

• $C(11; 12)$.

Dans ces conditions:

a. $f(0) = -11$. (ordonnée du point A)

b. $f'(11) = 0$, car la tangente au point $C(11; 12)$ est parallèle à l'axe des abscisses. Et donc son coefficient directeur est nul.

c. $f'(0)$?

Nous savons que la tangente à la courbe C_f , au point $x = 0$, passe par les points: $A(0; -11)$ et $B(5; 0)$.

Soit $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(0)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff a = \frac{0 - (-11)}{5 - 0} \text{ cad: } a = f'(0) = \frac{11}{5}$$

Au total: $f(0) = -11$, $f'(11) = 0$ et $f'(0) = \frac{11}{5}$.

2. L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifions:

Ici, F correspond à une primitive de f sur $[0; 30]$.

Donc pour tout $x \in [0; 30]$: $F'(x) = f(x)$.

Sur $[0; 11]$, le signe de f est tantôt négatif, tantôt positif.

Donc sur $[0; 11]$, la fonction F est d'abord décroissante puis est croissante.

Ainsi: L'affirmation est fausse.

Partie B: Étude d'une fonction

1. Justifions le résultat de la ligne 2 du logiciel:

Ici: • $f(x) = (x^2 - 11) e^{-0,2x}$ ($u \times e^v$)

• $Df = [0; 30]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[0; 30]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 30]$.

Pour tout $x \in [0; 30]$:

$f'(x) = (2x) \times (e^{-0,2x}) + (x^2 - 11) \times (-0,2 e^{-0,2x})$ ($u' \times e^v + u \times v' \times e^v$)

$= (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}$.

Au total, pour tout $x \in [0; 30]$: $f'(x) = (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}$.

2. Etudions le signe de f' sur $[0; 30]$ puis dressons le tableau des variations:

Préalablement, résolvons l'équation: $-0,2x^2 + 2x + 2,2 = 0$ (1).

$$\Delta = 4 - 4 \times (-0,2) \times 2,2 \text{ cad: } \Delta = 5,76 = (2,4)^2 > 0.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet 2 solutions:

$$\bullet x_1 = \frac{-2 - 2,4}{-0,4} \text{ cad: } x_1 = 11,$$

$$\bullet x_2 = \frac{-2 + 2,4}{-0,4} \text{ cad: } x_2 = -1.$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 30]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -0,2x^2 + 2x + 2,2 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 11 \text{ ou } x \in [11; +\infty[.$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-0,2x} > 0$)

• 2^{ème} cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -0,2x^2 + 2x + 2,2 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 11 \text{ ou } x \in [0; 11].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-0,2x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[0; 11]$,

• f est décroissante sur $[11; +\infty[$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0	11	30	
f'		+	0	-
f			b	
	a			c

- Avec:
- $a = f(0) = -11$,
 - $b = f(11) = 110 e^{-2,2}$,
 - $c = f(30) = 889 e^{-6}$.

3. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 11]$:

$$\text{Sur } [0; 11], f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 11) e^{-0,2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11 = 0, \text{ car: pour tout } x \in \mathbb{R}, e^{-0,2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow \alpha = x = \sqrt{11}, \text{ car: } x \in [0; 11].$$

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution α sur $[0; 11]$: $\alpha = \sqrt{11}$.

3. b. Donnons une valeur approchée de α à 10^{-2} près:

Une valeur approchée de $\alpha = \sqrt{11}$, à 10^{-2} près est: $\alpha \approx 3,32$.

4. Calculons la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de I :

$$\text{Ici: } I = \int_{10}^{20} f(x) dx.$$

Or d'après le logiciel: $F(x) = (-5x^2 - 50x - 195) e^{-0,2x}$.

(F étant l'intégrale de f)

$$\begin{aligned}
 \text{D'où: } I &= [F(x)]_{10}^{20} \\
 &= [(-5x^2 - 50x - 195) e^{-0,2x}]_{10}^{20} \\
 &= -3195 e^{-4} + 1195 e^{-2} \\
 &\approx 103,21.
 \end{aligned}$$

- Ainsi:**
- la valeur exacte de I est $-3195 e^{-4} + 1195 e^{-2}$,
 - l'arrondi à 10^{-2} de I est $103,21$.

Partie C: Application économique

1. Calculons le nombre d'objets demandés lorsque le prix unitaire est de 15 €:

- D'après l'énoncé:
- $f(x)$ = la quantité demandée d'objets ($\times 100\,000$),
 - x = le prix unitaire en euros.

Donc si le prix unitaire est $x = 15$ euros, la quantité demandée d'objets sera de: $f(15) = ((15)^2 - 11) e^{-3}$

cad: $f(15) = 214 \times e^{-3}$

ou: $f(15) \approx 10,65 \times 100\,000$ unités.

Ainsi, la quantité totale demandée d'objets au prix unitaire de 15 € est d'environ: 1065000 unités.

2. Déterminons la demande moyenne d'objets lorsque le prix unitaire varie entre 10 et 20 euros:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la valeur moyenne " m " de f sur l'intervalle $[10; 20]$.

D'après le cours, "m" est telle que:
$$m = \frac{1}{20 - 10} \int_{10}^{20} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{10} \times I.$$

Or: $I \approx 103,21.$

D'où: $m \approx \frac{103,21}{10}$

$\approx 10,32 \times 100\,000$ unités.

Au total, la demande moyenne d'objets avec un prix unitaire qui varie entre 10 et 20 euros est d'environ: 1032 000 unités.

3. Calculons $E(15)$ et interprétons le résultat:

D'après l'énoncé: $E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x$, avec $x \in [5; 30]$.

Dans ces conditions, si $x = 15$:
$$E(15) = \left[\frac{(-0,2 \times (15)^2 + 2 \times (15) + 2,2) e^{-3}}{((15)^2 - 11) \times e^{-3}} \right] \times 15$$

$$= \left[\frac{-12,8}{214} \right] \times 15$$

$\approx -0,90.$

Au total, l'élasticité demandée est d'environ: -0,90.

Cela signifie que si le prix diminue de 1%, alors la demande d'objets augmentera de 0,9% (-1% \times -0,9).

On dit alors que le bien est **typique**, sa demande étant une fonction décroissante de son prix.