Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

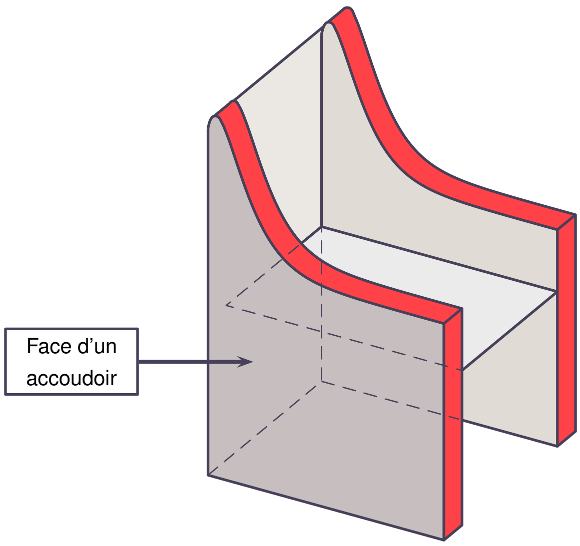
INTÉGRALE, SYNTHÈSE 12

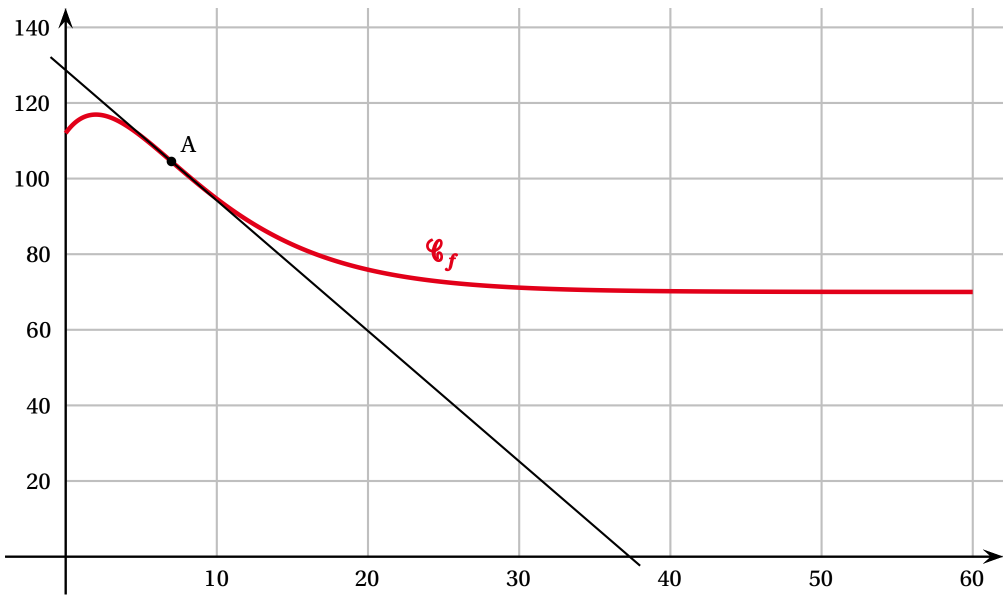
CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$:

Soient les 2 graphiques suivantes:





Graphiquement, il semble que:
- $f(0) \approx 115$,
- $f(60) \approx 72$.

Ainsi, les valeurs approchées de $f(0)$ et $f(60)$ sont:

$$f(0) \approx 115 \quad \text{et} \quad f(60) \approx 72.$$

2. Déterminons $f''(7)$:

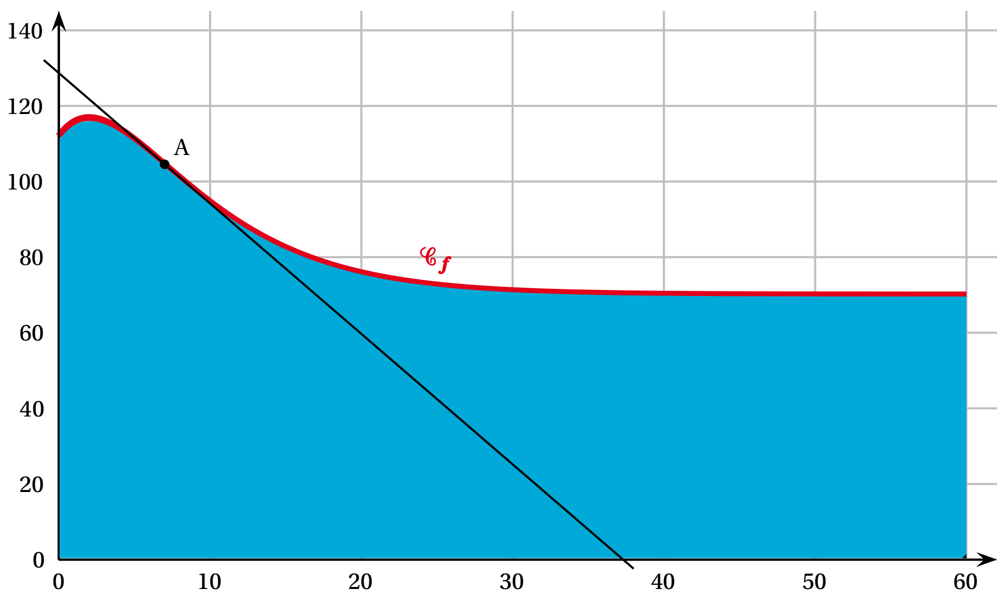
D'après l'énoncé le point A $(7; f(7))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

En tant que point d'inflexion, nous pouvons affirmer que: $f''(7) = 0$.

Au total: $f''(7) = 0$.

3. a. Représentons la surface demandée:

La surface située entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$ correspond à la zone turquoise du graphique suivant:



3. b. L'estimation de l'ébéniste est-elle correcte ?

L'estimation de l'ébéniste **n'est pas correcte**.

En effet, la zone turquoise contient le rectangle $70 \times 60 = 4200$ u.a.

Par conséquent, l'aire de cette surface turquoise est strictement supérieure à 4200 u.a.

Or: $3800 < 4200$.

Ainsi, comme $3800 < 4200$: l'estimation de l'ébéniste est **fausse** !

Partie B:

1. Calculons f' sur l'intervalle $[\,0\,;\,60\,]$:

Ici: • $f(x) = 70 + (14x + 42)\, e^{-\frac{x}{5}}$ **$(70 + u \times e^{v})$**

• $Df = [\,0\,;\,60\,]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[\,0\,;\,60\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;\,60\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;\,60\,]$:

$$f'(x) = 0 + (14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times (e^{-\frac{x}{5}})$$

$(0 + u' \times e^{v} + u \times v' \times e^{v})$

$$= \frac{1}{5}(-14x + 28)\, e^{-\frac{x}{5}}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,60\,]$, nous avons bien:

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)\, e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. a. Etudions le signe de f' sur $[0; 60]$:

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)\, e^{-\frac{x}{5}}, \text{ pour tout } x \in [0; 60].$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 60]$:

• **1er cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-14x + 28 \leqslant 0$ **cad ssi**: $x \geqslant 2$ **ou** $x \in [2; 60]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{5}} > 0$)

• **2ème cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-14x + 28 \geqslant 0$ **cad ssi**: $x \leqslant 2$ ou $x \in [0; 2]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{5}} > 0$)

Ainsi: • f est croissante sur $[0; 2]$,

• f est décroissante sur $[2; 60]$.

2. b. Dressons le tableau des variations de f sur $[0; 60]$:

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0		2		60
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = 112$,

- $b = 70 + 70\,e^{-\frac{2}{5}}$, (≈ 117)

- $c = 70 + 882\,e^{-12}$. (≈ 70)

3. Etudions la convexité de f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici: $f''(x) = 14 \times \left(\dfrac{x-7}{25}\right) \times e^{-\frac{x}{5}}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ **ssi**: $x \leqslant 7$ **cad**: $x \in [\,0\,;7\,]$.

• $f''(x) \geqslant 0$ **ssi**: $x \geqslant 7$ **cad**: $x \in [\,7\,;60\,]$.

Ainsi: • f est concave sur $I = [\,0\,;7\,]$,

• f est convexe sur $I' = [\,7\,;60\,]$.

4. a. Montrons que G est une primitive de g sur l'intervalle [0 ; 60]:

Sur l'intervalle [0 ; 60], G est une primitive de g ssi: $G'(x) = g(x)$.

Ici: $G(x) = (-70x - 560)\,e^{-\frac{x}{5}}$, pour tout $x \in [\,0\,;60\,]$. $(u \times e^{v})$

D'où pour tout $x \in [\,0\,;60\,]$: $G'(x) = (-70) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (-70x - 560) \times \left(-\dfrac{1}{5}\,e^{-\frac{x}{5}}\right)$

$(u' \times v + u \times v' \times e^{v})$

$= (14x + 42)\,e^{-\frac{x}{5}} = g(x)$.

Au total: G est bien une primitive de g sur [0 ; 60].

4. b. Déduisons-en une primitive de f sur [0 ; 60]:

Nous remarquons que: $f(x) = g(x) + 70$.

Donc une primitive de f sur [0 ; 60] est: $G(x) + 70x$.

4. c. Calculons la valeur exacte et la valeur approchée de $\int_0^{60} f(x)\,dx$:

Il s'agit de calculer ici: $I = \int_0^{60} f(x)\,dx$.

D'où: $I = \int_0^{60} g(x)\,dx + \int_0^{60} 70\,dx$

$= [\,G(x)\,]_0^{60} + [\,70x\,]_0^{60}$

$= [\,(-70x - 560)\,e^{-\frac{x}{5}}\,]_0^{60} + [\,70x\,]_0^{60}$

$= 4760\,(1 - e^{-12})$

≈ 4760 à l'unité près.

Au total:
- une valeur exacte de I est: **$4760\,(1 - e^{-12})$**,
- une valeur approchée de I est: **4760 à l'unité près**.

Partie C:

Aura-t-il suffisamment de vernis ?

La surface S à vernir a une aire égale à:

$\mathcal{A} = 4I + 5\,400$ cad: $\mathcal{A} = 24\,440 \text{ cm}^2$.

(car: 2 accoudoirs à vernir sur les 2 faces = 4)

Or: $\frac{1}{4} \times 10 \text{ m}^2 = 25000 \text{ cm}^2$.

Au total, comme $25000 > 24\,440$: l'ébéniste aura suffisamment de vernis pour toute la surface désirée.