Spé Maths
Terminale

« ln » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC LN 21

CORRECTION

Partie A:

1. L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur Cf ?

Non.

Justifions le.

L'aire $\mathscr{A}$ du rectangle OPMQ est:

Longueur x Largeur $= f(x) \times x$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{A}(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Comme l'aire $\mathscr{A}$ est fonction de x, elle ne peut pas être constante car $x \in]0;14]$.

2. L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

Oui.

Justifions le.

Nous devons calculer la valeur de " x " telle que: $\mathscr{A}'(x) = 0$.

Ici: • $\mathscr{A}(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

• $D_{\mathscr{A}} =]0;14]$.

Posons: $\mathcal{A} = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = -x$ et $f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $]0;14]$.

f_3 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $]0;14]$.

Par conséquent, $f_2 \times f_3$ est dérivable sur $]0;14]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0;14]$.

Enfin, $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]0;14]$ comme somme **$(f_1 + f_2 \times f_3)$** de 2 fonctions dérivables sur $]0;14]$.

Ainsi, nous pouvons calculer $\mathcal{A}'$ pour tout $x \in]0;14]$.

Pour tout $x \in]0;14]$: $\mathcal{A}'(x) = 2 - \left(1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{A}'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dans ces conditions: $\mathcal{A}'(x) = 0$ ssi: $x = 2e$.

Notons que:
- $\mathcal{A}$ est croissante sur $]0;2e]$
- $\mathcal{A}$ est décroissante sur $[2e;14]$
- $\mathcal{A}$ est maximale quand $x = 2e$.

En conclusion: le point $M(2e; f(2e))$ cad $M(2e;1)$ est tel que l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

Cette aire maximale est égale à: $\mathcal{A}_{max} = 2 \times (2e) - (2e) \ln\left(\frac{2e}{2}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{max} = 2e.$$

Partie B : Modélisation continue

1. a. Étudions le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$:

• **Calculons f'** :

Ici : • $f(t) = 100 - 75e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$

• $Df = [0;+\infty[$.

Posons : $f = f_1 + f_2 \times f_3$, avec : $f_1(t) = 100$, $f_2(t) = -75$ et $f_3(t) = e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[0;+\infty[$.

f_3 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

Par conséquent, $h = f_2 \times f_3$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Donc, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme $(f_1 + h)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0;+\infty[$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) = 75\left(\frac{\ln(5)}{10}\right)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$

$\Rightarrow f'(t) = 7,5\ln(5)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

Au total : pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = 7,5\ln(5)e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}$.

• **Étudions le signe de f' sur $[0;+\infty[$** :

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) > 0$.

Donc pour tout $t \in [0;+\infty[$: f est strictement croissante.

• **Dressons le tableau de variation**:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

t	0 $+\infty$
f'	$+$
f	$a \nearrow b$

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 25$,

• $b = f(+\infty) \Rightarrow b = 100$.

$$\left(\lim_{t \to +\infty} f(t) = 100 \quad \text{car:} \quad \lim_{t \to +\infty} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} = 0 \right)$$

1. b. Justifions que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$:

Supposons: $t \geq 10$ (1).

$$(1) \Rightarrow \frac{\ln(5) \times (10)}{10} \geq \ln(5)$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(5) \times (10)}{10} \leq -\ln(5)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \leq e^{-\ln(5)}$$

$$\Rightarrow 100 - 75e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \geq 100 - 75 \times \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) \geq 100 - 15$$

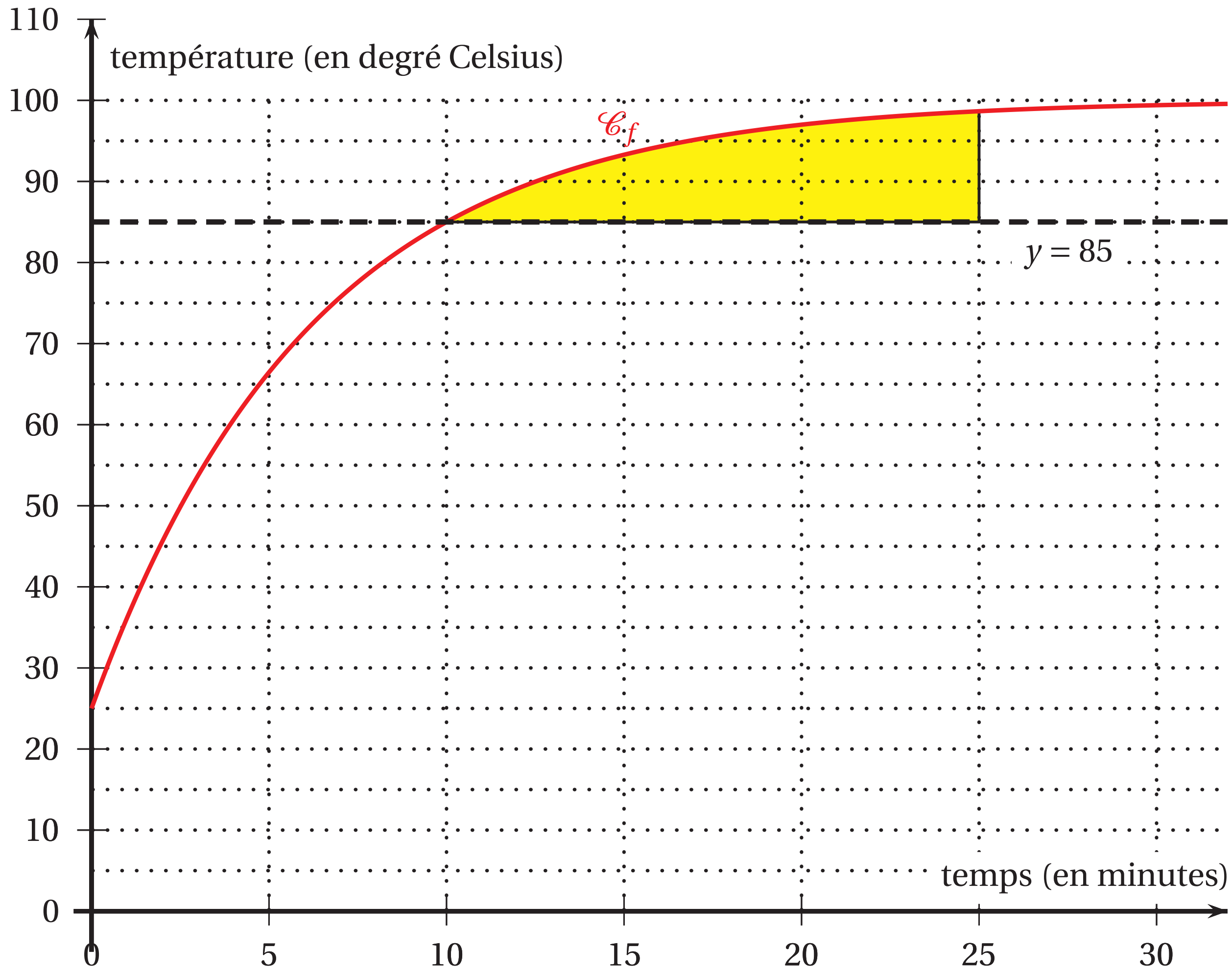
$$\Rightarrow f(t) \geq 85.$$

Au total: si $t \geqslant 10$, alors $f(t) \geqslant 85$.

2. a. Justifions, à l'aide du graphique que $\mathscr{A}(25) > 80$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}(25)$ du domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = 25$, $y = 85$ et la courbe représentative de f, est telle que: $\mathscr{A}(25) \approx 100$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}(25)$, en jaune, sur le graphique suivant:



En effet: • un rectangle correspond à 5 x 5 unités d'aire,

• dans la partie jaune, il y a 3 rectangles entiers + 2 demi-rectangles + des petits morceaux de rectangles, soit au minimum:

$$3 \times (5 \times 5) + 2 \times \left(\frac{5 \times 5}{2}\right) + \varepsilon \quad \text{cad} \quad \text{une centaine d'unités d'aire.}$$

Au total, l'aire demandée $\mathcal{A}(25)$ est telle que: $\mathcal{A}(25) > 80$.

2. b. Montrons que $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt$:

$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,dt$.

La fonction " $f(t) - 85$ " est continue sur $[0;+\infty[$ donc sur $[10;\theta]$. Elle admet donc des primitives sur $[10;\theta]$ et par conséquent: $\mathcal{A}(\theta)$ existe.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,dt \\
&= \int_{10}^{\theta} \left(100 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} - 85\right)dt \\
&= \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\right)dt \\
&= \int_{10}^{\theta} 15\,dt - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt \\
&= [15t]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt.$$

Au total: l'égalité est bien vérifiée.

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La stérilisation est finie au bout de 20 minutes ssi: $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\mathscr{A}(20) > 80 \iff 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt > 80$$

$$\iff -75\int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt > -70$$

$$\iff \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt < \frac{7}{7,5}.$$

Posons: $I = \displaystyle\int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\,dt.$

Ainsi: $I = \left[\dfrac{-10}{\ln(5)}\, e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}\right]_{10}^{20}$

$$= \frac{-10}{\ln(5)}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{8}{5 \times \ln(5)} > \frac{7}{7,5}.$$

Au total, au bout de 20 minutes, la stérilisation n'est pas finie car: $I > \dfrac{7}{7,5}$.