

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. Calculons $f(20)$:

Ici: • $f(t) = (0,8t + 0,2) e^{-0,5t} + 0,03$

• $Df = [0; 20]$.

Dans ces conditions: $f(20) = (0,8 \times 20 + 0,2) e^{-0,5 \times 20} + 0,03$

$$= 16,2 e^{-10} + 0,03$$

$$\approx 0,031.$$

Ainsi: $f(20) \approx 0,031$.

Cela signifie que le taux de CO_2 au bout de 20 minutes est d'environ 3,1%.

1. b. Déterminons le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience:

D'après le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 20]$, nous constatons que le maximum de f est atteint au point $M(1,75; f(1,75))$.

Or: $f(1,75) \approx 0,697$.

Ainsi: le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est d'environ 69,7%.

2. a. Justifions qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition:

Il s'agit de démontrer que l'équation $V = f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution strictement positive que nous noterons: T .

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[0; 20]$, donc sur $]1,75; 20]$.

- " $k = 3,5\%$ " est compris entre: $f(20) \approx 3,1\%$

$$\text{et: } f(1,75) \approx 69,7\%.$$

- f est strictement décroissante sur $]1,75; 20]$, d'après le tableau de variation de f .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(t) = 3,5\%$ ($k = 3,5\%$) admet une **unique** solution T appartenant à $]1,75; 20]$.

Au total: $f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution T sur $]1,75; 20]$.

2. b. b1. Déterminons la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme:

En programmant cet algorithme sur la calculatrice, nous obtenons comme valeur de la variable t à la fin de l'algorithme: $t = 15,75$ minutes.

En effet: • $f(15,65) \approx 0,0351 > 3,5\%$
• $f(15,75) \approx 0,03487 < 3,5\%$.

2. b. b2. Que représente cette valeur dans le cadre de l'exercice ?

Cela signifie que: le taux de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est inférieur ou égal à 3,5% au delà de 15,75 minutes.

Notons que: 15,75 minutes = 15 minutes et 45 secondes.

3. a. Montrons que F est une primitive de f sur $[0; 11]$:

Sur l'intervalle $[0; 11]$, F est une primitive de f ssi: $F'(t) = f(t)$.

Or ici, pour tout $t \in [0; 11]$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (-1,6 \times e^{-0,5t}) + ((-1,6t - 3,6) \times (-0,5 e^{-0,5t})) + 0,03 \\ &= 0,8t e^{-0,5t} + 0,2 e^{-0,5t} + 0,03 \\ &= (0,8t + 0,2) e^{-0,5t} + 0,03 \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Au total, pour tout $t \in [0; 11]$: F est bien une primitive de f car $F'(t) = f(t)$.

3. b. Déduisons-en le taux moyen V_m , valeur moyenne de f sur $[0; 11]$:

Soit " V_m ", le taux moyen ou valeur moyenne de f sur $[0; 11]$.

$$V_m \text{ est tel que: } V_m = \frac{1}{11-0} \int_0^{11} f(x) dx.$$

$$\begin{aligned}\text{Or: } \frac{1}{11-0} \int_0^{11} f(x) dx &= \frac{1}{11} [F(x)]_0^{11} \\ &= \frac{1}{11} (F(11) - F(0)) \\ &\approx 34,9\% \text{ arrondi à } 0,1\%.\end{aligned}$$

Au total: le taux moyen V_m est d'environ 34,9%.

Cela signifie que le taux moyen de CO_2 , dans le local pendant l'expérience, est d'environ 34,9% pendant les 11 premières minutes.