Spé Maths
Terminale

Exponentielle exp(x) : Équations & Inéquations

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INÉQUATIONS À RÉSOUDRE 4

CORRECTION

Résolvons dans IR les inéquations suivantes:

1. $e^{2x} - (1+e)\,e^{x} + e \geqslant 0$:

Soit l'équation: $e^{2x} - (1+e)\,e^{x} + e = 0$.

Pour résoudre cette équation, procédons au changement de variable suivant: $X = e^{x}$.

D'où: $e^{2x} - (1+e)\,e^{x} + e = 0 \iff (e^{x})^2 - (1+e)\,e^{x} + e = 0$

$\iff X^2 - (1+e)X + e = 0.$ $(aX^2 + bX + c = 0)$

- $\Delta = b^2 - 4ac = (1+e)^2 - 4e = (e-1)^2 > 0.$
- Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes:

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+e)-(e-1)}{2} = 1 > 0,$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+e)+(e-1)}{2} = e > 0.$$

L'équation $X^2 - (1+e)X + e = 0$ admet donc deux solutions: $X_1 = 1$ **et** $X_2 = e$.

Or: • $X_1 = 1 \iff e^{x_1} = 1 \iff e^{x_1} = e^{0}$ **cad** $x_1 = 0$.

- $X_2 = e \iff e^{x_2} = e^1$ **cad** $x_2 = 1$.

L'ensemble solution des valeurs " x " telles que $e^{2x} - (1 + e)\, e^x + e \geqslant 0$ est donc:

$$S =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[.$$

2. $\dfrac{e^{x(x+1)}}{e^2} \leqslant 1$:

$\dfrac{e^{x(x+1)}}{e^2} \leqslant 1 \iff e^{x^2+x} \leqslant e^2 \iff x^2 + x \leqslant 2 \iff \boldsymbol{x^2 + x - 2 \leqslant 0}.$

Soit l'équation: $x^2 + x - 2 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$.
- Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes:

  - $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2} = -2,$
  - $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2} = 1.$

L'ensemble solution des valeurs " x " telles que $\dfrac{e^{x(x+1)}}{e^2} \leqslant 1$ est donc:

$$S = [-2 ; 1].$$

3. $(-8x + 4)(3x - 1)\, e^{x-2} > 0$:

$(-8x + 4)(3x - 1)\, e^{x-2} > 0 \iff (-8x + 4)(3x - 1) > 0$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{x-2} > 0$)

$\iff -6x^2 + 5x - 1 > 0.$

Soit l'équation: $-6x^2 + 5x - 1 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 = (1)^2 > 0$.
- Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{-12} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{-12} = \frac{1}{3}.$$

L'ensemble solution des valeurs " x " telles que $(-8x + 4)(3x - 1)e^{x-2} > 0$ est donc:

$$S = \left] \frac{1}{3} ; \frac{1}{2} \right[.$$