

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Limites « d'une fonction f »



MINI COURS

A. Limites infinie en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. Notations :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Limites admises à connaître :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si "n" impair} \\ +\infty & \text{si "n" pair} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

B. Limites finie en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. Notations :

Soit ℓ un réel, on note :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$

2. Limites admises à connaître :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$

3. Asymptote horizontale :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$: la droite d'équation $y = \ell.$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$: la droite d'équation $y = \ell.$

C. Limites en un réel "a" :

1. Notations :

Soit "a" un réel, on note :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

2. Limite "à droite" et limite "à gauche" :

- Limite "à droite" quand x tend vers "a" se note :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x).$$

- Limite "à gauche" quand x tend vers "a" se note :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x).$$

3. Limites admises à connaître :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si "n" pair} \\ -\infty, & \text{si "n" impair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

4. Asymptote verticale:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (à gauche ou à droite), la courbe représentative

de f admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$.

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{2}{x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} = +\infty$$

d'où : f admet une asymptote verticale d'équation : $x = 1$.

D. Limites somme, produit, quotient :

1. Somme de 2 limites :

Si $\lim f =$	p	p	p	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim g =$	p'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim (f+g) =$	$p+p'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

2. Produit de 2 limites :

Si $\lim f =$	p	$p > 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim g =$	p'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim (f \times g) =$	$p \times p'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3. Quotient de 2 limites :

a. Cas où $\lim g(x) \neq 0$:

Si $\lim f =$	ρ	ρ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim g =$	ρ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\rho' > 0$	$\rho' < 0$	$\rho' > 0$	$\rho' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim \left(\frac{f}{g} \right) =$	$\frac{\rho}{\rho'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

b. Cas où $\lim g(x) = 0$:

Si $\lim f =$	$\rho > 0$ ou $+\infty$	$\rho < 0$ ou $-\infty$	$\rho > 0$ ou $+\infty$	$\rho < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim g =$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\lim \left(\frac{f}{g} \right) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

E. 4 formes indéterminées (**FI**) :

- $+\infty - \infty$
- **0** $\times \infty$
- ∞ / ∞
- **0 / 0.**

F. Théorèmes à connaître :

1. Théorème 1 :

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[A; +\infty[$:

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Théorème 2 des gendarmes :

Soient ℓ un réel et trois fonctions f , g et h avec :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ sur } [A; +\infty[.$$

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

Ce théorème marche aussi quand x tend vers " $-\infty$ " ou vers un réel " a ".