Spé Maths
Terminale

Limites « d'une fonction f »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LIMITES FINIES EN $+\infty$ ET $-\infty$

5

CORRECTION

1. a. Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction f :

Ici: $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{3x^2 + 7}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x^2}{3x^2 + 7}.$$

Or: • $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2 - x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1 \right)$ $(x \neq 0)$

• $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 3x^2 + 7 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(3 + \frac{7}{x^2} \right)$ $(x \neq 0)$.

Et: • $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0^+$

• $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x^2} = 0^+$.

Dans ces conditions: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 (0^+ - 1)}{x^2 (3 + 0^+)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{3x^2}$$

$$= -\frac{1}{3}.$$

1. b. Étudions la limite en $-\infty$ de la fonction f :

Ici: $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{3x^2 + 7}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - x^2}{3x^2 + 7}.$$

Or:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \left(\dfrac{2}{x^2} - 1 \right)$ $(x \neq 0)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 + 7 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \left(3 + \dfrac{7}{x^2} \right)$ $(x \neq 0)$.

Et:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{x^2} = 0^+$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 (0^+ - 1)}{x^2 (3 + 0^+)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{3x^2}$$

$$= -\frac{1}{3}.$$

2. Concluons:

- Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}$.

- Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}$.