Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 53

CORRECTION

Partie A:

1. a. Montrons que pour tout $x \in [-2 ; 2]$, $f(-x) = f(x)$:

Ici: • $f(x) = \frac{-b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{\frac{-x}{b}}\right) + \frac{9}{4}$, avec $b > 0$

• $Df = [-2 ; 2]$.

Dans ces conditions pour tout $x \in [-2 ; 2]$:

$$f(-x) = \frac{-b}{8}\left(e^{\frac{-x}{b}} + e^{-\frac{(-x)}{b}}\right) + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{-b}{8}\left(e^{\frac{-x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{-b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{\frac{-x}{b}}\right) + \frac{9}{4}$$

$$= f(x).$$

Au total, nous avons bien, pour tout $x \in [-2 ; 2]$: $f(-x) = f(x)$.

1. b. Que peut-on en déduire ?

Cela signifie: • d'une part, que la fonction f est paire sur $[-2 ; 2]$,

• d'autre part, que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Calculons f' sur l'intervalle $[-2 ; 2]$:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $[-2 ; 2]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2 ; 2]$.

Pour tout $x \in [-2 ; 2]$: $f'(x) = \frac{-b}{8}\left(\frac{1}{b} e^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{b} e^{\frac{-x}{b}}\right)$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}\right).$$

Au total, pour tout $x \in [-2 ; 2]$: $f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}\right)$.

3. a. Dressons le tableau de variations de f sur $[-2 ; 2]$:

• Étudions le signe de f' sur $[-2 ; 2]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[-2 ; 2]$:

• 1^er^ cas: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{b} = -\frac{x}{b} \quad (\text{car: } \ln[e^{u}] = u)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{b} = 0, \text{ cad: } x = 0.$$

• 2^ème^ cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $\frac{2x}{b} > 0$, cad: $x \in]0 ; 2]$.

• 3^ème^ cas: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $\frac{2x}{b} < 0$, cad: $x \in [-2 ; 0[$.

Au total: • f est croissante sur $[-2 ; 0]$,

(car sur [-2 ; 0], $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur [0 ; 2].

(car sur [0 ; 2], $f'(x) \leqslant 0$)

• **Dresser le tableau de variations de f :**

x	-2		0		2
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	a'	$\searrow$	a''

Avec : • $a = f(-2) \Rightarrow a = \frac{-b}{8}\left(e^{\frac{-2}{b}} + e^{\frac{2}{b}}\right) + \frac{9}{4}$,

• $a' = f(0) \Rightarrow a' = \frac{-b+9}{4}$,

• $a'' = f(2) \Rightarrow a'' = \frac{-b}{8}\left(e^{\frac{2}{b}} + e^{\frac{-2}{b}}\right) + \frac{9}{4}$.

3. b. Déduisons-en les coordonnées du point S en fonction de b :

D'après le tableau de variations, le maximum de f est atteint au point :

$$(0 ; a') \quad \text{cad} \quad \left(0 ; \frac{-b+9}{4}\right).$$

Au total, le point S est tel que : $S\left(0 ; \frac{-b+9}{4}\right)$.

Partie B:

1. Justifions que $b = 1$:

D'après l'énoncé: " On souhaite que le point S soit à 2 mètres du sol ".

Dans ces conditions, nous avons:

$$f(0) = 2 \iff \frac{-b+9}{4} = 2 \implies b = 1.$$

Au total, nous avons bien: $b = 1$ et $S(0; 2)$.

2. a. Montrons que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[-2; 2]$, donc sur $[0; 2]$.

- " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4}$ (car: $b = 1$)

  et: $f(0) = 2$.

- f est strictement décroissante sur $]0; 2]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet une unique solution α appartenant à $]0; 2]$.

Au total: $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α sur $]0; 2]$.

2. b. Déduisons-en une valeur approchée de " a " au centième:

Comme " **La hauteur du mur est de 1, 5 mètres** ", " a " est tel que: $f(a) = 1,5$.

Déterminer la valeur de " a " revient donc à déterminer la valeur de α.

Par tâtonnement, nous trouvons: $a = \alpha \approx 1,76$ à 10^{-2} près.

Au total, une valeur approchée de a au centième est: $a \approx 1,76$.

3. Que décide le client ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la masse réelle d'un vantail et comparer le résultat obtenu à 60 kg.

D'après le cours, nous savons que:

" Pour un corps homogène d'épaisseur constante, la masse surfacique (Ms) est le rapport de sa masse (m) sur sa surface ($\mathscr{A}$) ".

D'où: $Ms = \frac{m}{\mathscr{A}}$.

Ici: • la densité des planches de bois (masse surfacique) est égale à $20\,kg \cdot m^{-2}$,

• l'aire d'un vantail (surface) est égale à $\mathscr{A} = \int_0^a f(x)\,dx$ (en m^2),

• la masse d'un vantail **m** est l'inconnue recherchée (en kg).

Dans ces conditions: **m** $= 20 \times \mathscr{A}$.

Or: $\mathscr{A} = \int_0^a f(x)\,dx$

$$= \int_0^{1,8} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1,8} \left(-\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{8}\left[e^x - e^{-x} \right]_0^{1,8} + \left[\frac{9}{4}x \right]_0^{1,8}$$

=> $\mathscr{A} = -\frac{1}{8}(e^{1,8} - e^{-1,8}) + 4,05$ ou: $\mathscr{A} \approx 3,31\,m^2$.

D'où: **m** $\approx 20 \times 3,31$ => **m** $\approx 66,29$ kg.

Au total: comme **m** $\approx 66,29$ kg > 60 kg, la masse d'un vantail excède 60 kg et donc le client décidera d'automatiser son portail.

Partie C:

Évaluons l'économie réalisée en termes de surface en choisissant " 2 " plutôt que " 1 ":

Soient: • $\mathscr{A}_1$, l'aire du rectangle (forme 1),

- $\mathscr{A}_2$, l'aire du trapèze (forme 2).

Nous avons: • $\mathscr{A}_1 = 2 \times a$ (car: $S(0;2)$),

$$\bullet\ \mathscr{A}_2 = \left(\frac{b+B}{2}\right) \times h \iff \mathscr{A}_2 = \left(\frac{CH+OG}{2}\right) \times a$$

$$\iff \mathscr{A}_2 \approx \left(\frac{1,63+2,16}{2}\right) \times a$$

$$\implies \mathscr{A}_2 \approx 1,895 \times a.$$

Or: $a = 1,8$, d'où: $\mathscr{A}_1 = 3,6\ m^2$ et $\mathscr{A}_2 \approx 3,411\ m^2$.

Et: $\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1 \approx 0,19\ m^2$.

Ainsi, l'économie réalisée en termes de surface en choisissant " 2 " plutôt que " 1 " est: d'environ $0,19\ m^2$ pour un vantail et d'environ $0,38\ m^2$ pour le portail en totalité.