www.freemaths.fr

Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

8

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-20\,;\,20]$:

Ici: $f(x) = (-2x + 30)\,e^{0,2x-3}$, pour tout $x \in [-20\,;\,20]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-20\,;\,20]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-20\,;\,20]$:

$$f'(x) = (-2) \times (e^{0,2x-3}) + (-2x + 30) \times (0,2e^{0,2x-3})$$

$$= (-0,4x + 4)\,e^{0,2x-3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-20\,;\,20]$: $f'(x) = (-0,4x + 4)\,e^{0,2x-3}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-20\,;\,20]$:

- 1[er] cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(-0,4x + 4)\,e^{0,2x-3} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 10$ $\quad$ ($e^{0,2x-3} > 0$).

• 2^e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $(-0,4x+4)\,e^{0,2x-3} \geqslant 0$ cad ssi : $x \leqslant 10$ ($e^{0,2x-3} > 0$).

Ainsi : • f est croissante sur $[-20 ; 10]$,

• f est décroissante sur $[10 ; 20]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant :

x	-20		10		20
f'		$+$	0	$-$	
f		↗	b	↘	
	a				c

Avec : • $a = f(-20) \Rightarrow a = 70\,e^{-7}$,

• $b = f(10) \Rightarrow b = 10\,e^{-1}$,

• $c = f(20) \Rightarrow c = -10\,e$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $[10 ; 20]$:

Précisons que : sur $[10 ; 20]$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\, a\,; b\,]$ ou $I =]\, a\,; b\,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre f (a) et f (b), l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[\,-20\,; 20\,]$, donc sur $[\,10\,; 20\,]$.

• " $k = -2$ " est compris entre: $f(20) = -10e$

et: $f(10) = 10e^{-1}$.

• f est strictement décroissante sur $[\,10\,; 20\,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = -2$ $(k = -2)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[\,10\,; 20\,]$.