Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

7

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-4; 10]$:

Ici: $f(x) = (x + 4)\, e^{-0,5x}$, pour tout $x \in [-4; 10]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-4; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$f'(x) = (1) \times (e^{-0,5x}) + (x + 4) \times (-0,5e^{-0,5x})$$

$$= (-0,5x - 1)\, e^{-0,5x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-4; 10]$: $f'(x) = (-0,5x - 1)\, e^{-0,5x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(-0,5x - 1)\, e^{-0,5x} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant -2$ ($e^{-0,5x} > 0$).

• 2ᵉ cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $(-0,5x - 1)\, e^{-0,5x} \geq 0$ cad ssi: $x \leq -2$ ($e^{-0,5x} > 0$).

Ainsi: • f est croissante sur $[-4; -2]$,

• f est décroissante sur $[-2; 10]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-4		-2		10
f'		+	0	-	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(-4) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(-2) \Rightarrow b = 2e$,

• $c = f(10) \Rightarrow c = 14e^{-5}$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α sur $[1; 6]$:

Précisons que: f est strictement décroissante sur $[1; 6]$.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[-4; 10]$, donc sur $[1; 6]$.

• " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(6) = 10e^{-3}$

et: $f(1) = 5e^{-0,5}$.

• f est strictement décroissante sur $[1; 6]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1,5$ admet bien une unique solution α appartenant à $[1; 6]$.