Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

6

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[\ 1\ ;\ 25\ ]$:

Ici: $f(x) = \dfrac{x + 2 - \ln(x)}{x}$, pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[\ 1\ ;\ 25\ ]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$:

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \times (x) - (x + 2 - \ln(x)) \times (1)}{x^2}$$

$$= \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$: $f'(x) = \dfrac{-3 + \ln(x)}{x^2}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$:

• **1**

• 1^{er} cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-3 + \ln(x) \leqslant 0$

$\iff \ln(x) \leqslant 3$

cad ssi: $x \leqslant e^3$.

• 2^e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-3 + \ln(x) \geqslant 0$

$\iff \ln(x) \geqslant 3$

cad ssi: $x \geqslant e^3$.

Ainsi: • f est décroissante et même strictement décroissante sur $[1 ; e^3]$,

• f est croissante et même strictement croissante sur $[e^3 ; 25]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	1		e^3		25
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = f(1) \Rightarrow a = 3$,

• $b = f(e^3) \Rightarrow b = 1 - \dfrac{1}{e^3}$.

• $c = f(25) \Rightarrow c = \dfrac{27 - \ln(25)}{25}$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α sur $[1; e^3]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: **soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.**

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[1; 25]$, donc sur $[1; e^3]$.

• " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(e^3) = 1 - \frac{1}{e^3}$

et: $f(1) = 3$.

• f est strictement décroissante sur $[1; e^3]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1,5$ $(k = 1,5)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[1; e^3]$.