

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Corollaire du **TVI**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

4

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-2; 4]$:

Ici: $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$, pour tout $x \in [-2; 4]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[-2; 4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2; 4]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2) \times (e^{-2x}) + (2x + 1) \times (-2e^{-2x}) \\ &= -4x e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-2; 4]$: $f'(x) = -4x e^{-2x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-2; 4]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$f'(x) \leq 0$ ssi $-4x e^{-2x} \leq 0$ cad ssi: $x \geq 0$ ($e^{-2x} > 0$).

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -4x e^{-2x} \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 0 \quad (e^{-2x} > 0).$$

Ainsi: • f est croissante sur $[-2; 0]$,
• f est décroissante sur $[0; 4]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-2	0	4
f'	+	0	-
f			

Avec: • $a = f(-2) \Rightarrow a = -3e^4 + 3$,
• $b = f(0) \Rightarrow b = 4$,
• $c = f(4) \Rightarrow c = 9e^{-8} + 3$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-2; 0]$:

Précisons que: sur $[1; 6]$, f est même **strictement croissante**.

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

Ici: • f est continue sur $[-2; 4]$, donc sur $[-2; 0]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(-2) = -3e^4 + 3$

et: $f(0) = 4$.

• f est strictement croissante sur $[-2; 0]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[-2; 0]$.