Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

3

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[1;9]$:

Ici: $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x)$, pour tout $x \in [1;9]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[1;9]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [1;9]$:

$$f'(x) = x - 7 + \frac{6}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [1;9]$: $f'(x) = x - 7 + \frac{6}{x}$ ou $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Préalablement, déterminons les racines de l'équation: $x^2 - 7x + 6 = 0$.

$\Delta = (5)^2 > 0$.

D'où deux solutions: $x' = 1$ et $x'' = 6$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,1\,;9\,]$:

• **1er cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$ cad ssi: $x \in [\,1\,;6\,]$.

• **2e cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $x^2 - 7x + 6 \geqslant 0$ cad ssi: $x \in [\,6\,;9\,]$.

Ainsi: • f est décroissante et même strictement décroissante sur $[\,1\,;6\,]$,

• f est croissante et même strictement croissante sur $[\,6\,;9\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	1		6		9
f'	0	-	0	+	
f	a ↘		b	↗	c

Avec: • $a = 7,5$,

• $b = -10 + 6\ln(6)$,

• $c = -8,5 + 6\ln(10)$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur $[\,1\,;6\,]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\, a ; b \,]$ ou $I =]\, a ; b \,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[\, 1 ; 9 \,]$, donc sur $[\, 1 ; 6 \,]$.

• " $k = 5$ " est compris entre: $f(6) = -10 + 6\ln(6) < 5$

et: $f(1) = 7,5 > 5$.

• f est strictement décroissante sur $[\, 1 ; 6 \,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 5$ $(k = 5)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[\, 1 ; 6 \,]$.