Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES 2

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-4; 10]$:

Ici: $f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8)\,e^{-0,5x}$, pour tout $x \in [-4; 10]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-4; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$f'(x) = (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (-4x^2 - 10x + 8) \times (-0,5e^{-0,5x})$$

$$= (2x^2 - 3x - 14)\,e^{-0,5x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-4; 10]$: $f'(x) = (2x^2 - 3x - 14)\,e^{-0,5x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Préalablement, déterminons les racines de l'équation: $2x^2 - 3x - 14 = 0$.

$\Delta = (11)^2 > 0$.

D'où deux solutions: $x' = -2$ et $x'' = 3,5$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4 ; 10]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $2x^2 - 3x - 14 \leqslant 0$ cad ssi: $x \in [-2 ; 3,5]$ ($e^{-0,5x} > 0$).

- 2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $2x^2 - 3x - 14 \geqslant 0$ cad ssi: $x \in [-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$

($e^{-0,5x} > 0$).

Ainsi: • f est décroissante sur $[-2 ; 3,5]$,

• f est croissante sur $[-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-4		-2		$3,5$		10
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c	$\nearrow$	d

Avec: • $a = f(-4) = 1 - 16\,e^{2}$,

• $b = f(-2) = 1 + 12\,e$,

• $c = f(3,5) = 1 - 76\,e^{-\frac{7}{2}}$,

• $d = f(10) = 1 - 492\,e^{-5}$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-4;-2]$:

Précisons que: sur $[-4;-2]$, f est même strictement croissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a;b]$ ou $I =]a;b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- f est continue sur $[-4;10]$, donc sur $[-4;-2]$.
- " $k = 0$ " est compris entre: $f(-4) = 1 - 16e^2 < 0$

  et: $f(-2) = 1 + 12e > 0$.
- f est strictement croissante sur $[-4;-2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[-4;-2]$.