Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES 16

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[\,0\,;\,\pi\,]$:

Ici: $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}\cos(x)$, pour tout $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$:

$$f'(x) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\sin(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$: $f'(x) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\sin(x)$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Sur $[\,0\,;\,\pi\,]$: $f'(x) = \frac{2}{5}(\,1 + 2\sin(x)\,) > 0$ car $\sin(x) > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	π
f'	$+$	
f	a $\nearrow$	b

Avec: • $a = f(0) = -\dfrac{4}{5}$,

• $b = f(\pi) = \dfrac{2\pi + 4}{5}$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\,0\,;\,\pi\,]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;\,b\,]$ ou $I =]\,a\,;\,b\,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(0) = -\dfrac{4}{5}$

$$\text{et:} \quad f(\pi) = \frac{2\pi + 4}{5}.$$

- f est strictement croissante sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[\,0\,;\,\pi\,]$.