Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

15

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Ici: $f(x) = 2x\,e^{-x}$, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

$$f'(x) = (2) \times (e^{-x}) + (2x) \times (-e^{-x})$$

$$= 2\,(1 - x)\,e^{-x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = 2\,(1 - x)\,e^{-x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $2\,(1 - x)\,e^{-x} \leqslant 0$

$\iff 1 - x \leqslant 0 \quad (e^{-x} > 0)$

cad ssi: $x \geqslant 1.$

• 2^e^ cas: $f'(x) \geqslant 0.$

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $2(1 - x)e^{-x} \geqslant 0$

$\iff 1 - x \geqslant 0 \quad (e^{-x} > 0)$

cad ssi: $x \leqslant 1.$

Ainsi: • f est croissante sur $[0; 1]$,

• f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) = 0$,

• $b = f(1) = 2e^{-1}$,

• $c = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0,2$ admet une unique solution α sur $[0; 1]$:

Précisons que: sur $[0; 1]$, f est strictement croissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[0; +\infty[$, donc sur $[0; 1]$.

• " $k = 0,2$ " est compris entre: $f(0) = 0$

et: $f(1) = 2e^{-1}$.

• f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0,2$ $(k = 0,2)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[0; 1]$.