Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES 14

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-2\,;\,2]$:

Ici: $f(x) = -\dfrac{1}{8}(e^{x} + e^{-x}) + \dfrac{9}{4}$, pour tout $x \in [-2\,;\,2]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-2\,;\,2]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2\,;\,2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}(e^{x} - e^{-x}).$$

Ainsi, pour tout $x \in [-2\,;\,2]$: $f'(x) = -\dfrac{1}{8}(e^{x} - e^{-x})$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-2\,;\,2]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-\dfrac{1}{8}(e^{x} - e^{-x}) \leqslant 0$

$<=> \ e^x - e^{-x} \geq 0$

$<=> \ e^x \geq e^{-x}$

$<=> \ \ln(e^x) \geq \ln(e^{-x})$

cad ssi: $x \geq -x$ ou encore $x \geq 0$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $-\dfrac{1}{8}(e^x - e^{-x}) \geq 0$

$<=> \ e^x - e^{-x} \leq 0$

$<=> \ e^x \leq e^{-x}$

$<=> \ \ln(e^x) \leq \ln(e^{-x})$

cad ssi: $x \leq -x$ ou encore $x \leq 0$.

Ainsi: • f est croissante sur $[-2 ; 0]$,

• f est décroissante sur $[0 ; 2]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-2		0		2
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(-2) = -\dfrac{1}{8}(e^{-2} + e^{2}) + \dfrac{9}{4}$,

• $b = f(0) = 2$,

• $c = f(2) = -\dfrac{1}{8}(e^{2} + e^{-2}) + \dfrac{9}{4}$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α sur $[\,0\,;\,2\,]$:

Précisons que: sur $[\,0\,;\,2\,]$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;\,b\,]$ ou $I =]\,a\,;\,b\,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[\,-2\,;\,2\,]$, donc sur $[\,0\,;\,2\,]$.

- " k = 1,5 " est compris entre: $f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4}$

  et: $f(0) = 2$.

- f est strictement décroissante sur $[0;2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet bien une unique solution α appartenant à $[0;2]$.