Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

13

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[0; 20]$:

Ici: $f(x) = (0,8x + 0,2)\, e^{-0,5x} + 0,03$, pour tout $x \in [0; 20]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[0; 20]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 20]$:

$$f'(x) = (0,8) \times e^{-0,5x} + (0,8x + 0,2) \times (-0,5e^{-0,5x})$$

$$= (0,8 - 0,4x - 0,1) \times e^{-0,5x}$$

$$= (0,7 - 0,4x) \times e^{-0,5x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 20]$: $f'(x) = (0,7 - 0,4x) \times e^{-0,5x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 20]$:

- 1[er] cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $0,7 - 0,4x \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant \frac{7}{4}$ ($e^{-0,5x} > 0$).

• 2[e] cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $0,7 - 0,4x \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant \frac{7}{4}$ ($e^{-0,5x} > 0$).

Ainsi: • f est croissante sur $[0; \frac{7}{4}]$ cad $[0; 1,75]$,

• f est décroissante sur $[\frac{7}{4}; 20]$ cad $[1,75; 20]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		1,75		20
f'		+	0	-	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0) = 0,23$, ($\approx 23\%$)

• $b = f(1,75) = 0,697$, ($\approx 69,7\%$)

• $c = f(20) = 0,031$. ($\approx 3,1\%$).

3. Montrons que l'équation $f(x) = 3,5\%$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1,75; 20]$:

Précisons que: sur $[1,75; 20]$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\, a ; b \,]$ ou $I =]\, a ; b \,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f\,(a)$ et $f\,(b)$, l'équation $f\,(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- f est continue sur $[\, 0 ; 20 \,]$, donc sur $[\, 1,75 ; 20 \,]$.
- " $k = 3,5\%$ " est compris entre: $f\,(20) \approx$ **3, 1%**

  et: $f\,(1,75) \approx$ **69, 7%**.
- f est strictement décroissante sur $[\, 1,75 ; 20 \,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f\,(x) = 3,5\%$ ($k = 3,5\%$) admet bien une unique solution α appartenant à $[\, 1,75 ; 20 \,]$.