Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

12

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Ici: $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 4.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

D'après le tableau de signes donné dans l'énoncé:

- f est strictement décroissante sur $[\,0\,;\ln(2+\sqrt{5})\,]$.
- f est strictement croissante sur $[\,\ln(2+\sqrt{5})\,;+\infty\,[$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = f(0) = 0$,

• $b = f(\ln(2+\sqrt{5})) = 2\sqrt{5} - 2 - 4\ln(2+\sqrt{5})$,

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[0; +\infty[$, donc sur $[\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(\ln(2+\sqrt{5})) = 2\sqrt{5} - 2 - 4\ln(2+\sqrt{5})$

et: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- f est strictement croissante sur $[\ \ln(2+\sqrt{5})\,;+\infty\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ $(k=0)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[\ \ln(2+\sqrt{5})\,;+\infty\,[$.