Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES 10

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Ici: $f(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in \mathbb{R}$:

• 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-\dfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \leqslant 0$

$\Longleftrightarrow$ $e^x - e^{-x} \geqslant 0$

$\Longleftrightarrow$ $e^x \geqslant e^{-x}$

$\Longleftrightarrow$ $\ln(e^x) \geqslant \ln(e^{-x})$

cad ssi: $x \geqslant -x$ ou encore $x \geqslant 0$.

• 2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-\dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geqslant 0$

$\Longleftrightarrow$ $e^x - e^{-x} \leqslant 0$

$\Longleftrightarrow$ $e^x \leqslant e^{-x}$

$\Longleftrightarrow$ $\ln(e^x) \leqslant \ln(e^{-x})$

cad ssi: $x \leqslant -x$ ou encore $x \leqslant 0$.

Ainsi: • f est croissante sur $]-\infty ; 0]$,

• f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = -\infty$,

• $b = \frac{5}{2}$,

• $c = -\infty$.

3. **Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\,0\,;+\infty\,[$:**

Précisons que: sur $[\,0\,;+\infty\,[$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;b\,]$ ou $I =]\,a\,;b\,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

$$\text{et: } \quad f(0) = \frac{5}{2} > 0.$$

- f est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[\,0\,;+\infty\,[$.