Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

1

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-10\,;2]$:

Ici: $f(x)=(2-x)\,e^x$, pour tout $x\in[-10\,;2]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-10\,;2]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x\in[-10\,;2]$:

$$f'(x)=(-1)\times(e^x)+(2-x)\times(e^x)$$

$$=(1-x)\,e^x.$$

Ainsi, pour tout $x\in[-10\,;2]$: $f'(x)=(1-x)\,e^x$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x\in[-10\,;2]$:

- 1er cas: $f'(x)\leqslant 0$.

$f'(x)\leqslant 0$ ssi $(1-x)\leqslant 0$ cad ssi: $x\geqslant 1$ $(e^x>0)$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $(1 - x) \geq 0$ cad ssi: $x \leq 1$ ($e^x > 0$).

Ainsi: • f est croissante sur $[-10; 1]$,

• f est décroissante sur $[1; 2]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-10		1		2
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = 12\,e^{-10}$,

• $b = e$,

• $c = 0$.

3. Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $[-10; 2]$:

Précisons que: • sur $[-10; 1]$, f est même strictement croissante.

• sur $[1; 2]$, f est même strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Distinguons 2 cas:

1er cas: $x \in [-10; 1]$.

Dans ce cas: • f est continue sur $[-10; 2]$, donc sur $[-10; 1]$.

• " $k = 1$ " est compris entre: $f(-10) = 12e^{-10} < 1$

et: $f(1) = e > 1$.

• f est strictement croissante sur $[-10; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ $(k = 1)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[-10; 1]$.

2e cas: $x \in [1; 2]$.

Dans ce cas: • f est continue sur $[-10; 2]$, donc sur $[1; 2]$.

• " $k = 1$ " est compris entre: $f(2) = 0 < 1$

et: $f(1) = e > 1$.

• f est strictement décroissante sur $[1; 2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ $(k = 1)$ admet bien une unique solution β appartenant à $[1; 2]$.

En définitive: l'équation $f(x) = 1$ admet exactement 2 solutions α et β dans l'intervalle $[-10; 2]$.