

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

POINT D'INFLEXION

6

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur \mathbb{R} :

Ici: $f(x) = 5x^2 e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\bullet f'(x) = (10x) \times (e^x) + (5x^2) \times (e^x)$$

$$= (5x^2 + 10x) e^x.$$

$$\bullet f''(x) = (10x + 10) \times (e^x) + (5x^2 + 10x) \times (e^x)$$

$$= (5x^2 + 20x + 10) e^x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (5x^2 + 10x) e^x \text{ et } f''(x) = (5x^2 + 20x + 10) e^x.$$

2. La courbe représentative de f admet-elle un point d'inflexion ?

Soient f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative.

Soit " a " un réel appartenant à I .

Si f'' s'annule et change de signe en a , alors \mathcal{C} admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 5e^x(x^2 + 4x + 2)$.

Soit l'équation: $x^2 + 4x + 2 = 0$.

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 > 0.$$

D'où deux solutions: $x' = -2 - \sqrt{2}$ et $x'' = -2 + \sqrt{2}$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, sachant que: $5e^x > 0$.

• 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0$.

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

$$\text{cad ssi: } x \in]-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2}; +\infty[.$$

• 2^e cas: $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } x^2 + 4x + 2 \leq 0$$

$$\text{cad ssi: } x \in [-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}].$$

Dans ces conditions, f'' s'annule en changeant de signe en deux points

d'abscisses: • $x = -2 - \sqrt{2}$ et • $x = -2 + \sqrt{2}$.

Ainsi, la courbe \mathcal{C} admet deux points d'inflexion ayant pour abscisses respectifs³:

$$x = -2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x = -2 + \sqrt{2}.$$