Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

POINT D'INFLEXION 4

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur IR:

Ici: $f(x) = e^{2x} - 10e^{x} + 16$, pour tout $x \in IR$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur IR.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in IR$:

- $f'(x) = 2e^{2x} - 10\, e^{x}$

  $= 2e^{x}\,(e^{x} - 5)$.

- $f''(x) = (2e^{x}) \times (e^{x} - 5) + (2e^{x}) \times (e^{x})$

  $= 4e^{2x} - 10\, e^{x}$

  $= 2e^{x}\,(2e^{x} - 5)$.

Ainsi, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = 2e^{x}\,(e^{x} - 5)$ et $f''(x) = 2e^{x}\,(2e^{x} - 5)$.

2. La courbe représentative de f admet-elle un point d'inflexion ?

Soient f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Soit " a " un réel appartenant à I.

Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 2e^x (2e^x - 5)$.

Distinguons 2 cas:

- 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0$.

$f''(x) \geq 0$ ssi $2e^x (2e^x - 5) \geq 0$

$\iff 2e^x - 5 \geq 0$ (car: $2e^x > 0$)

$\iff e^x \geq \dfrac{5}{2}$

cad ssi: $x \geq \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

- 2^e cas: $f''(x) \leq 0$.

$f''(x) \leq 0$ ssi $2e^x (2e^x - 5) \leq 0$

$\iff 2e^x - 5 \leq 0$ (car: $2e^x > 0$)

$\iff e^x \leq \dfrac{5}{2}$

cad ssi: $x \leq \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

Dans ces conditions: en $x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$, f'' s'annule en changeant de signe.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.