Spé Maths

Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

POINT D'INFLEXION 3

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$:

Ici: $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $]0;+\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in]0;+\infty[$:

- $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right) \times (x) - (1 + \ln(x)) \times (1)}{x^2}$

$$= \frac{-\ln(x)}{x^2}.$$

- $f''(x) = \dfrac{-\left(\dfrac{1}{x}\right) \times (x^2) + (\ln(x)) \times (2x)}{x^4}$

$$= \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-\ln(x)}{x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x^3}$.

2. La courbe représentative de f admet-elle un point d'inflexion ?

Soient f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Soit " a " un réel appartenant à I.

Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x^3}$.

Distinguons 2 cas:

- 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $\dfrac{2\ln(x) - 1}{x^3} \geqslant 0$

$\iff 2\ln(x) - 1 \geqslant 0$

cad ssi: $x \geqslant e^{1/2}$.

- 2e cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $\dfrac{2\ln(x) - 1}{x^3} \leqslant 0$

$\iff 2\ln(x) - 1 \leqslant 0$

cad ssi $x \leqslant e^{1/2}$.

Dans ces conditions: en $x = e^{1/2}$, f'' s'annule en changeant de signe.

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 1$.