

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ

8

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-4; 10]$:

Ici: $f(x) = (x + 4)e^{-0,5x}$, pour tout $x \in [-4; 10]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[-4; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (1) \times (e^{-0,5x}) + (x + 4) \times (-0,5 e^{-0,5x}) \\ &= (-0,5x - 1) e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-0,5) \times (e^{-0,5x}) + (-0,5x - 1) \times (-0,5 e^{-0,5x}) \\ &= 0,25x e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$f'(x) = (-0,5x - 1) e^{-0,5x} \text{ et } f''(x) = 0,25x e^{-0,5x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } (-0,5x - 1)e^{-0,5x} \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq -2 \quad (e^{-0,5x} > 0).$$

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } (-0,5x - 1)e^{-0,5x} \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq -2 \quad (e^{-0,5x} > 0).$$

Ainsi: • f est croissante sur $[-4; -2]$,

• f est décroissante sur $[-2; 10]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

| | | | |
|------|-----|-----|-----|
| x | -4 | -2 | 10 |
| f' | + | 0 | - |
| f | a | b | c |

Avec: • $a = f(-4) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(-2) \Rightarrow b = 2e$,

• $c = f(10) \Rightarrow c = 14e^{-5}$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geq 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-4; 10]$: $f''(x) = 0,25x e^{-0,5x}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leq 0$ ssi: $0,25x \leq 0$ cad: $x \leq 0$,

• $f''(x) \geq 0$ ssi: $0,25x \geq 0$ cad: $x \geq 0$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,5x} > 0$)

Ainsi: • f est concave sur $I = [-4; 0]$,

• f est convexe sur $I' = [0; 10]$.