Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 7

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[\,0,7\,;\,6\,]$:

Ici: $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\,e^{-2x+6}$, pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[\,0,7\,;\,6\,]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$:

- $f'(x) = (2x - 2) \times (e^{-2x+6}) + (x^2 - 2x + 1) \times (-\,2 \times e^{-2x+6})$

  $= (-\,2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6}$.

- $f''(x) = (-4x + 6) \times (e^{-2x+6}) + (-2x^2 + 6x - 4) \times (-\,2 \times e^{-2x+6})$

  $= 2\,(2x^2 - 8x + 7)\,e^{-2x+6}$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$:

$f'(x) = (-\,2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6}$ et $f''(x) = 2\,(2x^2 - 8x + 7)\,e^{-2x+6}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Préalablement, déterminons les racines de l'équation: $-2x^2 + 6x - 4 = 0$.

$\Delta = (2)^2 > 0$.

D'où deux solutions: $x' = 1$ et $x'' = 2$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6} \leqslant 0$

$\iff -2x^2 + 6x - 4 \leqslant 0 \qquad (\,e^{-2x+6} > 0\,)$

cad ssi: $x \in [\,0,7\,;\,1\,] \cup [\,2\,;\,6\,]$.

- 2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6} \geqslant 0$

$\iff -2x^2 + 6x - 4 \geqslant 0 \qquad (\,e^{-2x+6} > 0\,)$

cad ssi: $x \in [\,1\,;\,2\,]$.

Ainsi:
- f est décroissante sur $[\,0,7\,;\,1\,] \cup [\,2\,;\,6\,]$,
- f est croissante sur $[\,1\,;\,2\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	$0,7$		1		2		6
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c	$\searrow$	d

Avec: • $a = f\,(0,7) \Rightarrow a = \dots,$

• $b = f\,(1) \Rightarrow b = 0,$

• $c = f\,(2) \Rightarrow c = e^2,$

• $d = f\,(6) \Rightarrow d = 25.$

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$: $f''(x) = 2\,(2x^2 - 8x + 7)\,e^{-2x+6}$.

Soit l'équation: $2x^2 - 8x + 7 = 0$.

$\Delta = (2\sqrt{2}\,)^2 > 0$.

D'où deux solutions: $x' = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$ et $x'' = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$, sachant que:

$$e^{-2x+6} > 0.$$

• 1er cas: $f''(x) \geq 0$.

$f''(x) \geq 0$ ssi $2\,(2x^2 - 8x + 7)\,e^{-2x+6} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 8x + 7 \geq 0$

cad: $x \in \left[0,7\,;\ \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\,;6\right]$.

• 2e cas: $f''(x) \leq 0$.

$f''(x) \leq 0$ ssi $2\,(2x^2 - 8x + 7)\,e^{-2x+6} \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 8x + 7 \leq 0$

cad: $x \in \left[\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ainsi: • f est convexe sur $I' = \left[0,7\,;\ \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\,;6\right]$,

• f est concave sur $I = \left[\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right]$.