Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 6

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[\ 10\ ;\ 50\ ]$:

Ici: $f(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$, pour tout $x \in [\ 10\ ;\ 50\ ]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[\ 10\ ;\ 50\ ]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer $f\,'$ et $f\,''$ pour tout $x \in [\ 10\ ;\ 50\ ]$:

- $f'(x) = \dfrac{(0) \times (1 + e^{-0,25x+6}) - (90) \times (-0\ 25\ e^{-0,25x+6})}{[\ 1 + e^{-0,25x+6}\ ]^2}$

$$= \frac{22,5\ e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2}.$$

- $f''(x) = \dfrac{(22,5 \times (-0,25) \times e^{-0,25x+6}) \times (1 + e^{-0,25x+6})^2}{[\ 1 + e^{-0,25x+6}\ ]^4}$

$$\frac{-(22,5\ e^{-0,25x+6}) \times [\ 2 \times (1 + e^{-0,25x+6}) \times (-0,25\ e^{-0,25x+6})\ ]}{[\ 1 + e^{-0,25x+6}\ ]^4}$$

$$= \frac{5,625\ e^{-0,25x+6}\ (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\ 10\ ; 50\ ]$:

$$f'(x) = \frac{22,5\ e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{5,625\ e^{-0,25x+6}\ (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Pour tout $x \in [\ 10\ ; 50\ ]$: $\quad f'(x) = \dfrac{22,5\ e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2}.$

Comme pour tout $x \in [\ 10\ ; 50\ ]$, $(1 + e^{-0,25x+6})^2 > 0$, le signe de $f\,'(x)$ dépend du signe de $22,5\ e^{-0,25x+6}$.

Or pour tout $x \in [\ 10\ ; 50\ ]$: $\quad e^{-0,25x+6} > 0$.

Dans ces conditions: $\quad f'(x) > 0$, pour tout $x \in [\ 10\ ; 50\ ]$.

Ainsi: $\quad f$ est strictement croissante sur $[\ 10\ ; 50\ ]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	10		50
f'		$+$	
f	a	$\nearrow$	b

Avec: • $a = f(10) \Rightarrow a = \dfrac{90}{1+e^{3,5}}$,

• $b = f(50) \Rightarrow b = \dfrac{90}{1+e^{-6,5}}$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [\,10\,;\,50\,]$: $f''(x) = \dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1+e^{-0,25x+6})^3}$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,10\,;\,50\,]$, sachant que: $e^{-0,25x+6} > 0$.

• 1^er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $\dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1+e^{-0,25x+6})^3} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 5,625\,(e^{-0,25x+6} - 1) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,25x+6} \geqslant 1$

$\Leftrightarrow -0,25x+6 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \leqslant 24$ cad $x \in [\,10\,;\,24\,]$

• 2ᵉ cas: $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } \frac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3} \leq 0$$

$$\iff 5,625\,(e^{-0,25x+6} - 1) \leq 0$$

$$\iff e^{-0,25x+6} \leq 1$$

$$\iff -0,25x + 6 \leq 0$$

$$\iff x \geq 24 \text{ cad } x \in [24 ; 50]$$

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [10 ; 24]$,

• f est concave sur $I = [24 ; 50]$.