Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 5

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-2\,;\,4]$:

Ici: $f(x) = (2x + 1)\,e^{-2x} + 3$, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[-2\,;\,4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

- $f'(x) = (2) \times (e^{-2x}) + (2x + 1) \times (-2e^{-2x})$

  $= -4x\,e^{-2x}$.

- $f''(x) = (-4) \times (e^{-2x}) + (-4x) \times (-2e^{-2x})$

  $= (8x - 4)\,e^{-2x}$.

Ainsi, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

$$f'(x) = -4x\,e^{-2x} \quad \text{et} \quad f''(x) = (8x - 4)\,e^{-2x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

• 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-4x\, e^{-2x} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 0$ ($e^{-2x} > 0$).

• 2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-4x\, e^{-2x} \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant 0$ ($e^{-2x} > 0$).

Ainsi: • f est croissante sur $[-2\,;0]$,

• f est décroissante sur $[0\,;4]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-2		0		4
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(-2) \Rightarrow a = -3e^{4} + 3$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = 4$,

• $c = f(4) \Rightarrow c = 9e^{-8} + 3$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$: $f''(x) = (8x - 4)\,e^{-2x}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ ssi: $8x - 4 \leqslant 0$ cad: $x \leqslant \frac{1}{2}$,

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi: $8x - 4 \geqslant 0$ cad: $x \geqslant \frac{1}{2}$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

Ainsi: • f est concave sur $I = [-2\,;\,\frac{1}{2}]$,

• f est convexe sur $I' = [\frac{1}{2}\,;\,4]$.