

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ

15

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$:

Ici: $f(x) = x \ln(x) - x + 1$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (1) \times (\ln(x)) + (x) \times \left(\frac{1}{x}\right) - 1 \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

$$\bullet f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \ln(x)$ et $f''(x) = \frac{1}{x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in]0; +\infty[$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$f'(x) \leq 0$ ssi $\ln(x) \leq 0$ cad ssi: $x \in]0; 1]$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $\ln(x) \geq 0$ cad ssi: $x \in [1; +\infty[$.

Ainsi: • f est décroissante sur $]0; 1]$,

• f est croissante sur $[1; +\infty[$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	1	$+\infty$	
f'		-	0	+
f				

Diagram illustrating the variation of the function f on the interval $]0; +\infty[$. The function is decreasing on $]0; 1]$ and increasing on $[1; +\infty[$. The minimum value of f is 0 at $x=1$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geq 0$.

Or ici, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Ainsi : f est strictement convexe sur $I' =]0; +\infty[$.