

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

**Convexité & Concavité**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

# ÉTUDIER LA CONVEXITÉ

15

## CORRECTION

1. Calculons  $f'(x)$  et  $f''(x)$  sur  $]0; +\infty[$ :

Ici:  $f(x) = x \ln(x) - x + 1$ , pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

D'après l'énoncé  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer  $f'$  et  $f''$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ :

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (1) \times (\ln(x)) + (x) \times \left(\frac{1}{x}\right) - 1 \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

$$\bullet f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ :  $f'(x) = \ln(x)$  et  $f''(x) = \frac{1}{x}$ .

2. Étudions le sens de variation de  $f$  et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de  $f$ :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$f'(x) \leq 0$  ssi  $\ln(x) \leq 0$  cad ssi:  $x \in ]0; 1]$ .

• 2<sup>e</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$f'(x) \geq 0$  ssi  $\ln(x) \geq 0$  cad ssi:  $x \in [1; +\infty[$ .

Ainsi: •  $f$  est décroissante sur  $]0; 1]$ ,

•  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

b. Tableau de variation de  $f$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	0	1	$+\infty$	
$f'$		-	0	+
$f$				

Diagramme de variation de  $f$  :

3. Étudions la convexité de la fonction  $f$ :

D'après le cours: •  $f$  est concave sur un intervalle  $I$  ssi:

pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

•  $f$  est convexe sur un intervalle  $I'$  ssi:

pour tout  $x \in I'$ ,  $f''(x) \geq 0$ .

Or ici, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ .

**Ainsi :**  $f$  est strictement convexe sur  $I' = ]0; +\infty[$ .