Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 14

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[\,0\,;\,8\,]$:

Ici: $f(x) = \dfrac{0,4}{20\,e^{-x} + 1} + 0,4$, pour tout $x \in [\,0\,;\,8\,]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[\,0\,;\,8\,]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [\,0\,;\,8\,]$:

- $f'(x) = \dfrac{8\,e^{-x}}{(20\,e^{-x} + 1)^2}$.

- $f''(x) = 8\,e^{-x} \times \left[\dfrac{20\,e^{-x} - 1}{(20\,e^{-x} + 1)^3} \right]$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;\,8\,]$:

$$f'(x) = \frac{8\,e^{-x}}{(20\,e^{-x} + 1)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = 8\,e^{-x} \times \left[\frac{20\,e^{-x} - 1}{(20\,e^{-x} + 1)^3} \right].$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,8\,]$: $\quad f'(x) = \dfrac{8\,e^{-x}}{(20\,e^{-x} + 1)^2}$.

Comme pour tout $x \in [\,0\,;\,8\,]$, $(20\,e^{-x} + 1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $8\,e^{-x}$.

Or pour tout $x \in [\,0\,;\,8\,]$: $\quad 8\,e^{-x} > 0$.

Dans ces conditions: $\quad f'(x) > 0$, pour tout $x \in [\,0\,;\,8\,]$.

Ainsi: $\quad f$ est strictement croissante sur $[\,0\,;\,8\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		8
f'		$+$	
f	a	$\nearrow$	b

Avec: $\quad \bullet\ a = f(0) \Rightarrow a = \dfrac{0,4}{21} + 0,4$,

$\bullet\ b = f(8) \Rightarrow b = \dfrac{0,4}{20\,e^{-8} + 1} + 0,4$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: $\quad \bullet\ f$ est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [0; 8]$: $f''(x) = 8\,e^{-x} \times \left[\dfrac{20\,e^{-x} - 1}{(20\,e^{-x} + 1)^3} \right]$.

Notons que pour tout $x \in [0; 8]$: • $8\,e^{-x} > 0$

• $(20\,e^{-x} + 1)^3 > 0$.

• **1er cas:** $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $20\,e^{-x} - 1 \geqslant 0$

$\iff e^{-x} \geqslant \dfrac{1}{20}$

$\iff -x \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{20}\right)$

$\iff -x \geqslant -\ln(20)$

cad ssi: $x \leqslant \ln(20)$.

• **2e cas:** $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $20\,e^{-x} - 1 \leqslant 0$ **cad ssi** $x \geqslant \ln(20)$.

Ainsi: • f **est convexe sur** $I' = [0; \ln(20)]$,

• f **est concave sur** $I = [\ln(20); 8]$.