Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 13

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0;6]$:

Ici: $f(x) = (10x - 5)e^{-x}$, pour tout $x \in [0;6]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[0;6]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [0;6]$:

- $f'(x) = (10) \times (e^{-x}) + (10x - 5) \times (-e^{-x})$

  $= (-10x + 15)e^{-x}$.

- $f''(x) = (-10) \times (e^{-x}) + (-10x + 15) \times (-e^{-x})$

  $= (10x - 25)e^{-x}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0;6]$:

$$f'(x) = (-10x + 15)e^{-x} \text{ et } f''(x) = (10x - 25)e^{-x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0\,;\,6\,]$:

- **1[er] cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(-10x + 15)\,e^{-x} \leqslant 0$ **cad ssi**: $x \geqslant \dfrac{3}{2}$ $\quad (\,e^{-x} > 0\,)$.

- **2[e] cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $(-10x + 15)\,e^{-x} \geqslant 0$ **cad ssi**: $x \leqslant \dfrac{3}{2}$ $\quad (\,e^{-x} > 0\,)$.

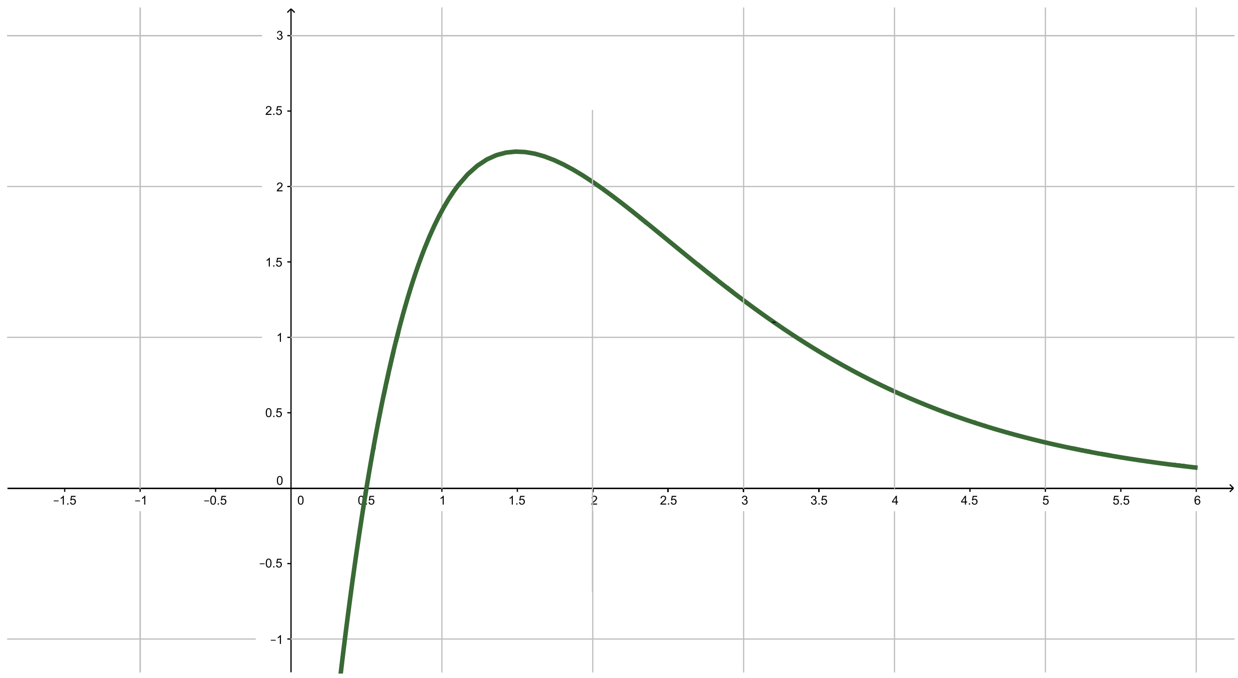
Ainsi:
- f est croissante sur $\left[\,0\,;\,\dfrac{3}{2}\,\right]$,
- f est décroissante sur $\left[\,\dfrac{3}{2}\,;\,6\,\right]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		$\dfrac{3}{2}$		6
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec:
- $a = f(0) \Rightarrow a = -5$,
- $b = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 10e^{-3/2} > 0$,
- $c = f(6) \Rightarrow c = 55e^{-6} > 0$.



3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours : • f est concave sur un intervalle I ssi :

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi :

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [\,0\,;\,6\,]$: $\boldsymbol{f''(x) = (10x - 25)\,e^{-x}}$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0\,;\,6\,]$:

• **1er cas** : $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $(10x - 25)\,e^{-x} \geqslant 0$ **cad ssi** : $x \geqslant \dfrac{5}{2}$ $\quad (e^{-x} > 0)$.

• **2e cas** : $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $(10x - 25)\,e^{-x} \leqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant \dfrac{5}{2}$ $\quad (e^{-x} > 0)$.

Ainsi: • f est concave sur $I' = [\,0\,;\dfrac{5}{2}\,]$,

• f est convexe sur $I = [\,\dfrac{5}{2}\,; 6\,]$.