

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ

12

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0; 1,5]$:

Ici: $f(x) = 9x^2(1 - 2 \ln(x)) + 10$, pour tout $x \in]0; 1,5]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $]0; 1,5]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in]0; 1,5]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (18x) \times (1 - 2 \ln(x)) + (9x^2) \times \left(\frac{-2}{x}\right) \\ &= -36x \ln(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-36) \times (\ln(x)) + (-36x) \times \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -36(1 + \ln(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1,5]$:

$$f'(x) = -36x \ln(x) \text{ et } f''(x) = -36(1 + \ln(x)).$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in]0; 1,5]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$f'(x) \leq 0$ ssi $-36x \ln(x) \leq 0$ cad ssi: $x \geq 1$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $-36x \ln(x) \geq 0$ cad ssi: $x \leq 1$.

Ainsi: • f est croissante sur $]0; 1]$,

• f est décroissante sur $[1; 1,5]$

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	1	1,5	
f'		+	0	-
f			b	
		a		c

Diagramme du tableau de variation: Le tableau est divisé en trois sections par les valeurs 0, 1 et 1,5. La première section (de 0 à 1) est marquée avec un signe '+', la deuxième (à 1) avec '0', et la troisième (de 1 à 1,5) avec '-'. Dans la section 'f', une flèche pointe de 'a' (à x=0) vers 'b' (à x=1), et une autre flèche pointe de 'b' vers 'c' (à x=1,5).

Avec: • $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow a = -\infty$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 19$,

• $c = f(1,5) \Rightarrow c = 30,25 - 40,5 \ln(1,5) > 0$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout $x \in]0; 1,5]$: $f''(x) = -36(1 + \ln(x))$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in]0; 1,5]$:

• 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0$.

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } -36(1 + \ln(x)) \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq e^{-1}.$$

• 2^e cas: $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } -36(1 + \ln(x)) \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq e^{-1}.$$

Ainsi: • f est convexe sur $I' =]0; e^{-1}]$,

• f est concave sur $I = [e^{-1}; 1,5]$.