Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 11

CORRECTION

1. **Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0,5;6]$:**

Ici: $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$, pour tout $x \in [0,5;6]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[0,5;6]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [0,5;6]$:

- $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x}$.
- $f''(x) = -\dfrac{3}{x^2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,5;6]$: $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x}$ et $f''(x) = -\dfrac{3}{x^2}$.

2. **Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:**

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0,5;6]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-2 + \dfrac{3}{x} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant \dfrac{3}{2}$.

• 2^e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-2 + \dfrac{3}{x} \geqslant 0$ cad ssi : $x \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Ainsi : • f est croissante sur $\left[\, 0,5 \,;\, \dfrac{3}{2} \,\right]$,

• f est décroissante sur $\left[\, \dfrac{3}{2} \,;\, 6 \,\right]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant :

x	$0,5$		$\dfrac{3}{2}$		6
f'		$+$	0	$-$	
f			b		
	a	↗		↘	c

Avec : • $a = f(0,5) \Rightarrow a = 4 + 3\ln(0,5) > 0$,

• $b = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 2 + 3\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$,

• $c = f(6) \Rightarrow c = -7 + 3\ln(6) < 0$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours : • f est concave sur un intervalle I ssi :

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [\,0,5\,;\,6\,]$: $f''(x) = -\dfrac{3}{x^2} < 0$.

Ainsi: f est strictement concave sur $I = [\,0,5\,;\,6\,]$.

Et: la courbe de f est située en dessous des tangentes en chacun de ses points.