# Spé Maths
## Terminale

# Convexité & Concavité

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 10

## CORRECTION

**1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0; 10]$:**

Ici: $f(x) = \dfrac{1}{0,5 + 100\, e^{-x}}$, pour tout $x \in [0; 10]$.

D'après l'énoncé $f$ est **deux fois dérivables** sur $[0; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer $f'$ et $f''$ pour tout $x \in [0; 10]$:

- $$f'(x) = \frac{(0) \times (0,5 + 100\, e^{-x}) - (1) \times (-100\, e^{-x})}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^2}$$

$$= \frac{100\, e^{-x}}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^2}.$$

- $$f''(x) = \frac{(-100\, e^{-x}) \times (0,5 + 100\, e^{-x})^2}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^4}$$

$$\frac{-(100\, e^{-x}) \times [2 \times (0,5 + 100\, e^{-x}) \times (-100\, e^{-x})]}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^4}$$

$$= \frac{100\, e^{-x} \times (100\, e^{-x} - 0,5)}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$:

$$f'(x) = \frac{100\,e^{-x}}{[0,5 + 100\,e^{-x}]^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{100\,e^{-x} \times (100\,e^{-x} - 0,5)}{[\,0,5 + 100\,e^{-x}\,]^3}.$$

## 2. Étudions le sens de variation de $f$ et dressons le tableau de variation:

### a. Sens de variation de $f$:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $f'(x) = \dfrac{100\,e^{-x}}{[0,5 + 100\,e^{-x}]^2}$.

Comme pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$, $[0,5 + 100\,e^{-x}]^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $100\,e^{-x}$.

Or pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $100\,e^{-x} > 0$.

Dans ces conditions: $f'(x) > 0$, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$.

Ainsi: $f$ est strictement croissante sur $[\,0\,;\,10\,]$.

### b. Tableau de variation de $f$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

| $x$ | $0$ | | $10$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $a$ | $\nearrow$ | $b$ |

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = \dfrac{1}{100,5}$,

• $b = f(10) \Rightarrow b = \dfrac{1}{0,5 + 100\, e^{-10}}$.

## 3. Étudions la convexité de la fonction $f$:

D'après le cours: • $f$ est concave sur un intervalle $I$ ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• $f$ est convexe sur un intervalle $I'$ ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [\,0;\, 10\,]$: $f''(x) = \dfrac{100\, e^{-x} \times (100\, e^{-x} - 0,5)}{[\,0,5 + 100\, e^{-x}\,]^3}$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0;\, 10\,]$, sachant que:

• $100\, e^{-x} > 0$

• $[\,0,5 + 100\, e^{-x}\,]^3 > 0$.

• 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $100\, e^{-x} - 0,5 \geqslant 0$ cad ssi $x \leqslant \ln(200)$.

• 2e cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $100\, e^{-x} - 0,5 \leqslant 0$ cad ssi $x \geqslant \ln(200)$.

Ainsi: • $f$ est convexe sur $I' = [\,0;\, \ln(200)\,]$,

• $f$ est concave sur $I = [\,\ln(200);\, 10\,]$.