Spé Maths
Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 1

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0; 60]$:

Ici: $f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$, pour tout $x \in [0; 60]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[0; 60]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [0; 60]$:

- $f'(x) = (14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}\right)$

$$= \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}.$$

- $f''(x) = \frac{1}{5} \times \left[(-14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (-14x + 28) \times \left(-\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}\right)\right]$

$$= 14 \times \left(\frac{x-7}{25}\right) \times e^{-\frac{x}{5}}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 60]$:

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}} \text{ et } f''(x) = 14 \times \left(\frac{x-7}{25}\right) \times e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0\,;60\,]$.

• 1^er^ cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-14x + 28 \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 2$ $\quad (e^{-\frac{x}{5}} > 0)$.

• 2^e^ cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-14x + 28 \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant 2$ $\quad (e^{-\frac{x}{5}} > 0)$.

Ainsi: • f est croissante sur $[\,0\,;2\,]$,

• f est décroissante sur $[\,2\,;60\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		2		60
f'		+	0	-	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = 112$,

• $b = 70 + 70\,e^{-\frac{2}{5}}$, $\quad (\approx 117)$

• $c = 70 + 882\,e^{-12}$. $\quad (\approx 70)$

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici: $f''(x) = 14 \times \left(\frac{x-7}{25}\right) \times e^{-\frac{x}{5}}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ ssi: $x \leqslant 7$ cad: $x \in [\,0\,;7\,]$ $\left(e^{-\frac{x}{5}} > 0\right)$.

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi: $x \geqslant 7$ cad: $x \in [\,7\,;60\,]$ $\left(e^{-\frac{x}{5}} > 0\right)$.

Ainsi: • f est concave sur $I = [\,0\,;7\,]$,

• f est convexe sur $I' = [\,7\,;60\,]$.