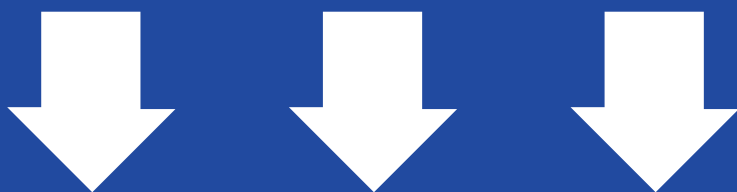


[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

**Convexité & Concavité**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

# ÉTUDIER LA CONVEXITÉ

/

## CORRECTION

1. Calculons  $f'(x)$  et  $f''(x)$  sur  $[0; 60]$ :

Ici:  $f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$ , pour tout  $x \in [0; 60]$ .

D'après l'énoncé  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0; 60]$ .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer  $f'$  et  $f''$  pour tout  $x \in [0; 60]$ :

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}\right) \\ &= \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= \frac{1}{5} \times \left[ (-14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (-14x + 28) \times \left(-\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}\right) \right] \\ &= 14 \times \left(\frac{x-7}{25}\right) \times e^{-\frac{x}{5}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 60]$ :

$$f'(x) = \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}} \text{ et } f''(x) = 14 \times \left(\frac{x-7}{25}\right) \times e^{-\frac{x}{5}}.$$

## 2. Étudions le sens de variation de $f$ et dressons le tableau de variation:

### a. Sens de variation de $f$ :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0; 60]$ .

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -14x + 28 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 2 \quad (e^{-\frac{x}{5}} > 0).$$

• 2<sup>e</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -14x + 28 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 2 \quad (e^{-\frac{x}{5}} > 0).$$

Ainsi: •  $f$  est croissante sur  $[0; 2]$ ,  
•  $f$  est décroissante sur  $[2; 60]$ .

### b. Tableau de variation de $f$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	0	2	60	
$f'$		+	0	-
$f$		$a$	$b$	$c$

Diagramme du tableau de variation: une flèche pointe de  $a$  vers  $b$  et une autre pointe de  $b$  vers  $c$ .

Avec: •  $a = 112$ ,

$$\bullet b = 70 + 70 e^{-\frac{2}{5}}, \quad (\approx 117)$$

$$\bullet c = 70 + 882 e^{-12}. \quad (\approx 70)$$

### 3. Étudions la convexité de la fonction $f$ :

D'après le cours: •  $f$  est concave sur un intervalle  $I$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

•  $f$  est convexe sur un intervalle  $I'$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici:  $f''(x) = 14x \left( \frac{x-7}{25} \right) x e^{-\frac{x}{5}}.$

Dans ces conditions: •  $f''(x) \leq 0$  ssi:  $x \leq 7$  cad:  $x \in [0; 7]$  ( $e^{-\frac{x}{5}} > 0$ ).

•  $f''(x) \geq 0$  ssi:  $x \geq 7$  cad:  $x \in [7; 60]$  ( $e^{-\frac{x}{5}} > 0$ ).

Ainsi: •  $f$  est concave sur  $I = [0; 7]$ ,

•  $f$  est convexe sur  $I' = [7; 60]$ .