BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

POLYNÉSIE
2024

$f(x) = 4 / (5 - x)$

CORRECTION

PARTIE A

1. Recopions et complétons la fonction Python *suite (n)*:

La fonction Python *suite (n)* qui prend comme paramètre le rang " n " et renvoie la valeur du terme U_n est:

```
def suite (n):
    u = 3
    for i in range (n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. Effectuons un calcul pour vérifier et expliquons cet affichage:

L'exécution de *suite (2)* renvoie 1.3333333333333333.

A la première boucle, on trouve: $U_1 = \dfrac{4}{5 - 3} = 2.$

A la seconde boucle, on trouve: $U_2 = \dfrac{4}{5 - 2} \approx 1.3333333333333333.$

3. a. Émettons une conjecture sur le sens de variation de la suite (U_n):

Les affichages sont les suivants:

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Les affichages sont des approximations de U_2, U_5, U_{10} et U_{20}: la suite (U_n) semble être strictement décroissante.

3. b. Émettons une conjecture sur la convergence de la suite (U_n):

D'après l'examen des affichages successifs: la suite (U_n) semble converger vers 1.

PARTIE B

1. Montrons que la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 5[$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{4}{5 - x}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $\mathcal{D}f =]-\infty ; 5[$.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty ; 5[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]-\infty ; 5[$.

Pour tout $x \in]-\infty ; 5[$: $f'(x) = \dfrac{(0) \times (5 - x) - (4) \times (-1)}{(5 - x)^2}$

$$\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \right)$$

$$= \frac{4}{(5 - x)^2}.$$

Comme pour tout $x \in]-\infty ; 5[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

2. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$:

Ici :
- $U_{n+1} = f(U_n)$
- $U_0 = 3$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que :

" pour tout entier naturel n : $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$ ".

Initialisation : $1 \leqslant U_1 \leqslant U_0 \leqslant 4$?

$$\begin{cases} U_0 = 3 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = \dfrac{4}{5 - U_0} \quad \text{cad} \quad U_1 = \dfrac{4}{5 - 3} = 2. \end{cases}$$

Nous avons donc bien : $1 \leqslant U_1 \leqslant U_0 \leqslant 4$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$ et montrons qu'alors $1 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.

Supposons: $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: f est strictement croissante sur $]-\infty ; 5[$.

D'où: (1) $\Rightarrow 1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4 \Rightarrow f(1) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(U_n) \leqslant f(4)$

$$\Rightarrow \frac{4}{5-1} \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{4}{5-4}$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1} \leqslant 4.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$.

3. a. **Prouvons $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$:**

Pour tout $x \in]-\infty ; 5[$: $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = x$

$$\Leftrightarrow 4 = x \times (5 - x)$$

$$\Leftrightarrow 4 = 5x - x^2$$

cad $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty ; 5[$: $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$.

3. b. **Résolvons l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ sur $]-\infty ; 5[$:**

Soit l'équation: $x^2 - 5x + 4 = 0$. $\quad (ax^2 + bx + c = 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes:

$$\bullet\ x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = 1 \in]-\infty ; 5[$$

$$\bullet\ x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4 \in]-\infty ; 5[.$$

L'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ admet donc deux racines sur $]-\infty ; 5[$:

$$x = 1 \ \text{ et } \ x = 4.$$

4. a. **Montrons que la suite (U_n) est convergente:**

D'après la question 2. Partie B, pour tout entier naturel n:

$$1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4 \iff \begin{cases} U_{n+1} \leqslant U_n \\ U_n \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 1 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

4. b. **Déterminons la limite de la suite (U_n):**

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [1 ; 4]$ telle que: $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff \ell^2 - 5\ell + 4 = 0$

$$\iff \begin{cases} \ell = 1 \\ \text{ou} \\ \ell = 4. \end{cases}$$

(d'après question précédente)

Comme $U_0 = 3$, écartons $\ell = 4$ et par conséquent la suite (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 1 \in [\,1\,;\,4\,]$.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en prenant $U_0 = 4$?

En prenant $U_0 = 4$:

- $U_1 = \dfrac{4}{5 - U_0} = \dfrac{4}{5 - 4} = 4$

- $U_2 = \dfrac{4}{5 - U_1} = \dfrac{4}{5 - 4} = 4$

- $U_3 = \dfrac{4}{5 - U_2} = \dfrac{4}{5 - 4} = 4$

.

.

- $U_n = \dfrac{4}{5 - 4} = 4.$

Dans ce cas, la suite (U_n) sera dite constante !

(tous ses termes étant égaux à 4)

Donc, le comportement de la suite ne sera pas identique.