www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

POLYNÉSIE
2024

$$f(t) = 180\, e^{-0,02t} + 30$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Justifions l'affichage du logiciel de calcul formel :

D'après l'énoncé : " **la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + 0,02y = m$, m étant une constante** ".

L'affiche du logiciel est le suivant :

Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0,02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\to}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

Pour justifier le résultat du logiciel, nous allons résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 0,02y = m \quad \text{cad} \quad y' = -0,02y + m.$$

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + b$ ($a \in IR^*$, $b \in IR^*$)

sont les fonctions de la forme : $x \to C \cdot e^{ax} + \dfrac{-b}{a}$, $C \in IR$.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = -0,02y$ sont :

$$h_1(t) = C \cdot e^{-0,02t},\ C \in IR.$$

• Une solution particulière de l'équation différentielle $y' = -0,02y + m$ est:

$$h_2(t) = -\frac{b}{a} = \frac{m}{0,02}.$$

Au total, les fonctions solutions de $y' + 0,02y = m$ sont:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad \text{cad} \quad h(t) = C.e^{-0,02t} + \frac{m}{0,02}.$$

Notons qu'en posant $C = k$, on retrouve la " **sortie** " de l'affichage.

En effet: $h(t) = C.e^{-0,02t} + \dfrac{m}{0,02}$ <=> $h(t) = k \times e^{-0,02t} + \dfrac{m}{0,02}$

<=> $h(t) = k \times e^{-0,02t} + 50 \times m$.

2. **Montrons que $m = 0,6$:**

On admet que: " **la température $f(t)$ tend vers 30°C lorsque t tend vers l'infini** ".

Cela signifie que: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 30°C$.

Or: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} h(t)$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} k \times e^{-0,02t} + 50 \times m$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{k}{e^{0,02t}} + 50 \times m$

$= 50 \times m$ car: $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{k}{e^{0,02t}} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 30°C \iff 50 \times m = 30°C$

cad $m = 0,6$.

3. Déterminons f sachant que $f(0) = 210$:

$f(0) = 210 \iff h(0) = 210$

$\iff k \times e^0 + 50 \times m = 210$

$\iff k + 50 \times 0,6 = 210$

(car: $m = 0,6$)

cad $k = 180$.

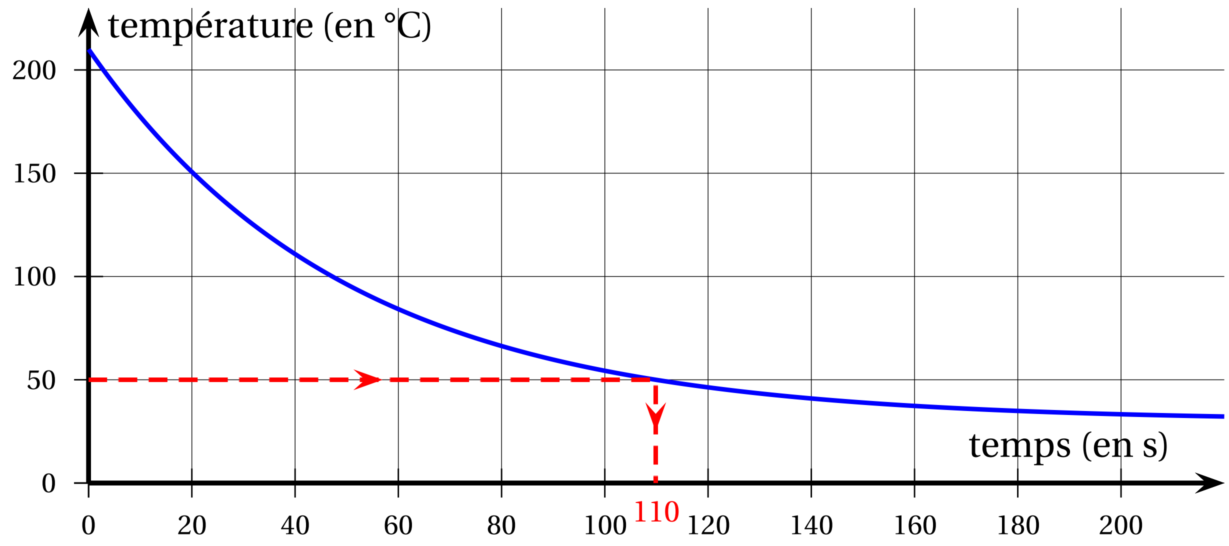
Ainsi $k = 180$ et nous pouvons écrire: $f(t) = 180 \times e^{-0,02t} + 30$.

PARTIE B

1. a. Donnons une valeur approchée du nombre T:

L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50 °C.

Graphiquement une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet est d'environ: 110 secondes.



1. b. Déterminons par le calcul la valeur exacte de T:

Pour répondre à cette question, nous devons résoudre l'équation: $f(T) = 50$.

$f(T) = 50 \iff 180 \times e^{-0,02T} + 30 = 50$

$\iff e^{-0,02T} = \frac{1}{9}$

$\iff \ln(e^{-0,02T}) = \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

$\iff -0,02T = -\ln(9)$

$\iff T = \frac{\ln(9)}{0,02}$

cad $T \approx 109,86$ secondes.

Par le calcul, T est environ égal à: 109, 86 secondes.

2. Calculons la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes:

D'après le cours, pour toute fonction f continue sur [a ; b], la valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel μ tel que:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Ici, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes revient à calculer: $\mu = \frac{1}{100-0} \cdot \int_0^{100} f(t)\,dt$.

Dans ces conditions: $\mu = \frac{1}{100} \cdot \int_0^{100} (180\,e^{-0,02t} + 30)\,dt$

$$= \frac{1}{100} \times \left[180 \times \frac{1}{-0,02} \times e^{-0,02t} + 30 \times t \right]_0^{100}$$

$$= \frac{1}{100} \times \left[\left(\frac{180}{-0,02} \times e^{-2} + 3000 \right) - \left(\frac{180}{-0,02} \times e^{0} \right) \right]$$

$$\approx 37,78.$$

Au total, la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes est d'environ: 37, 78 degrés Celsius.