BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 1

2024

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Montrons que f est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Ici : • $f(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$ $\quad (\,U^{1/2}\,)$

• $\mathcal{D}f = [\,0\,;+\infty\,[$.

Étape 1 : Calcul de f'

La fonction f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times (x+1)^{1/2-1} \times 1$ $\quad \left(\dfrac{1}{2} \times U^{1/2-1} \times U'\right)$

$$= \frac{1}{2} \times (x+1)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2 \times \sqrt{x+1}}.$$

D'où pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$: $f'(x) = \dfrac{1}{2 \times \sqrt{x+1}}$.

Étape 2: Étude du signe de f' sur $[\, 0 ; +\infty \,[$

Comme $x > 0$: $f'(x) > 0$ sur $[\, 0 ; +\infty \,[$.

Dans ces conditions: f est strictement croissante sur $[\, 0 ; +\infty \,[$.

2. Montrons que pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$, $f(x) - x = \dfrac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$:

Pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$: $f(x) - x = \sqrt{x+1} - x$

$$= \frac{(\sqrt{x+1} - x) \times (\sqrt{x+1} + x)}{(\sqrt{x+1} + x)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (x)^2}{(\sqrt{x+1} + x)}$$

$$= \frac{x + 1 - x^2}{\sqrt{x+1} + x}$$

$$= \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

Ainsi pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$, nous avons bien: $f(x) - x = \dfrac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$.

3. Déduisons-en que sur $[\, 0 ; +\infty \,[$, l'équation $f(x) = x$ admet $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ comme unique solution:

Sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $\boldsymbol{f(x)=x} \iff f(x)-x=0$

$$\iff \frac{-x^2+x+1}{(\sqrt{x+1}+x)}=0$$

$$\iff -x^2+x+1=0. \qquad (1)$$

En remplaçant x par $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ dans **(1)**, nous avons:

$$(1) \iff -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1=0\ ?$$

$$\iff -\frac{1}{4}(1+5+2\sqrt{5})+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})+1=0\ ?$$

$$\iff -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+1=0\ ?$$

$$\iff -\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=0\ ? \qquad \text{YES !}$$

Ainsi $f(x)=x$ admet bien comme unique solution: $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

PARTIE B

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$:

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$

• $U_0 = 5$

• $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$ ".

Initialisation: $1 \leqslant U_1 \leqslant U_0$?

$$\begin{cases} U_0 = 5 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = \sqrt{U_0 + 1} \quad \text{cad} \quad U_1 = \sqrt{6} \approx 2,50. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $1 \leqslant U_1 \leqslant U_0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$ et montrons qu'alors $1 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$.

Supposons: $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

Notons que: f est strictement croissante sur $[\, 0 ; +\infty \,[$.

D'où: (1) => $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$ => $f(1) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(U_n)$

=> $\sqrt{1+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$

$$\Rightarrow \; 1 < \sqrt{2} \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$$

$$\Rightarrow \; 1 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$.

2. Déduisons-en que la suite (U_n) converge:

D'après la question précédente, pour tout entier n:

$$1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \iff \begin{cases} U_{n+1} \leqslant U_n \\ U_n \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 1 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. Montrons que la suite (U_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [\,0\,;+\infty\,[$ telle que: $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0$$

cad $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, d'après Partie A 3.

La suite (U_n) converge donc vers: $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in [\,0\,;+\infty\,[$.

4. a. Donnons la valeur renvoyée par *seuil (2)*:

Seuil (2) va renvoyer l'indice du premier terme qui est à moins d'un centième de la limite ℓ.

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: • $U_4 - \ell \approx 0,02 \geq 10^{-2}$

• $U_5 - \ell \approx 0,007 < 10^{-2}$.

Donc la fonction renverra l'indice des premiers termes pour lequel le test du *while* n'est pas satisfait: " 5 ".

4. b. Interprétons cette valeur:

La valeur renvoyée par *seuil (4)* est 9.

Cela signifie que le premier terme de la suite qui est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près sera: U_9.